Notas de Álgebra Linear II - CM053

Prof. José Carlos Corrêa Eidam
DMAT-UFPR

Disponível no sítio `people.ufpr.br/ ~eidam/index.htm`

1o. semestre de 2012

Sumário

Capítulo 1

Espaços duais

1.1 Funcionais lineares

Nestas notas, estudaremos funcionais lineares sobre um vetorial V de dimensão finita sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, em geral, de dimensão finita. Denotaremos por $\mathscr{L}(\mathsf{V})$ o espaço dos operadores lineares em V. O espaço das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{F}$ será denotado por $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Quando $m = n$, escreveremos $\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.

Definição 1.1 Um *funcional linear* em V (ou sobre V) é uma transformação linear $\varphi : \mathsf{V} \to \mathbb{F}$. O espaço $\mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathbb{F})$ será chamado de *espaço dual* de V e denotado por V^*.

No próximo exemplo, veremos um tipo de funcional linear bastante importante.

Exemplo 1.2 Seja $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Para cada $v \in \mathsf{V}$, podemos obter únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Definimos $\varphi_j(v) = \alpha_j$, $v \in \mathsf{V}$, $j = 1, \ldots, n$. Decorre da unicidade dos α_j's que φ_j é uma bem-definida e linear.

Na próxima proposição, veremos que um funcional linear sobre um espaço de dimensão finita pode ser expresso de maneira bastante direta em termos de uma base.

Proposição 1.3 Seja $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\mathscr{B}^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, onde $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são definidos como no exemplo (1.2). São verdadeiras as seguintes afirmações:

1. $\mathscr{B}^*$ é uma base de V^*;
2. $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$
3. Para qualquer $v \in \mathsf{V}$, tem-se $v = \varphi_1(v) v_1 + \ldots + \varphi_n(v) v_n$.
4. Para qualquer $\varphi \in \mathsf{V}^*$, tem-se $\varphi = \varphi(v_1)\varphi_1 + \ldots + \varphi(v_n)\varphi_n$.

A base $\mathscr{B}^*$ é chamada de *base dual* da base $\mathscr{B}$.

Prova. Os ítens (2) e (3) decorrem diretamente da definição de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Para provar (1), observamos que se $\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j = 0$ então, calculando este último funcional linear em cada um dos vetores

v_j, concluímos que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, portanto, $\mathscr{B}^*$ é um conjunto linearmente independente. Além disso, dado $\varphi \in \mathsf{V}^*$ qualquer e $v = \varphi_1(v)v_1 + \ldots + \varphi_n(v)v_n \in \mathsf{V}$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \varphi(\varphi_1(v)v_1 + \ldots + \varphi_n(v)v_n) \\ &= \varphi(v_1)\varphi_1(v) + \ldots + \varphi(v_n)\varphi_n(v) \\ &= (\varphi(v_1)\varphi_1 + \ldots + \varphi(v_n)\varphi_n)(v),\end{aligned}$$

logo, vale a fórmula enunciada no ítem (4). Em particular, $\mathscr{B}^*$ gera V^*, e portanto, $\mathscr{B}^*$ é uma base de V^*. ∎

Corolário 1.4 Se V tem dimensão finita então $\dim \mathsf{V} = \dim \mathsf{V}^*$.

Corolário 1.5 Denotando os vetores de $\mathbb{F}^n$ por $(x_1, \ldots, x_n)$, todo funcional linear $\varphi \in (\mathbb{F}^n)^*$ é da forma

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

onde $a_j = \varphi(e_j)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{F}^n$.

Vejamos exemplos de funcionais lineares.

Exemplo 1.6 Sobre o espaço $\mathsf{V} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$, considere a função *traço* $\mathrm{tr} : \mathsf{V} \to \mathbb{F}$ definida como

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

onde $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Evidentemente, tr é um funcional linear.

Considere a base $\mathscr{B} = \{E_{ij} : 1 \le i, j \le n\}$, onde cada E_{ij} é a matriz que possui todas as entradas nulas, exceto na posição ij que vale 1, e a base dual $\mathscr{B}^* = \{\varphi_{11}, \ldots, \varphi_{nn}\}$. Evidentemente, se $A = (a_{ij})$, então $\varphi_{ij}(A) = a_{ij}$, para $1 \le i, j \le n$. Em particular,

$$\mathrm{tr} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}.$$

Exemplo 1.7 Veremos neste exemplo que todo funcional linear em $\mathsf{V} = \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ pode ser escrito em termos do traço. Inicialmente, observamos que se $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ então $\mathrm{tr}\,(E_{ji}A) = a_{ij}$ para $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. Como todo $\varphi \in \mathsf{V}^*$ se escreve como $\varphi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\varphi_{ij}$, onde $\mathscr{B}^* = \{\varphi_{ij} : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ é a base dual de $\mathscr{B} = \{E_{ij} : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$, segue que, para todo $\varphi \in \mathsf{V}^*$,

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(A) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathrm{tr}\,(E_{ji}A) \\ &= \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}E_{ji}A\right) \\ &= \mathrm{tr}\,(M^tA),\end{aligned}$$

onde $M = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}E_{ij}$. Como, evidentemente, uma função do tipo $\mathsf{V} \ni A \mapsto \mathrm{tr}\,(M^tA) \in \mathbb{F}$ é um funcional linear, para qualquer $M \in \mathsf{V}$, segue que todo funcional linear sobre V é desta última forma.

Exemplo 1.8 Sobre o espaço $\mathsf{V} = \mathscr{P}_n(\mathbb{F})$ formado pelos polinômios de grau $\leq n$ sobre $\mathbb{F}$, dado qualquer $a \in \mathbb{F}$, considere a aplicação $\Lambda_a(p) = p(a)$, $p \in \mathsf{V}$. Evidentemente, $\Lambda_a \in \mathsf{V}^*$.

Dados $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ distintos, consideremos $\Lambda_{a_j} \doteq \Lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$ e $\mathscr{C} = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\} \subset \mathsf{V}^*$. Para ver que $\mathscr{C}$ é linearmente independente, sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ tais que $\alpha_0\Lambda_0 + \ldots + \alpha_n\Lambda_n = 0$. Calculando este funcional linear a cada um dos polinômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$, obtemos um sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n & = & 0 \\ a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n & = & 0 \\ a_0^2\alpha_0 + a_1^2\alpha_1 + \ldots + a_n^2\alpha_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^n\alpha_0 + a_1^n\alpha_1 + \ldots + a_n^n\alpha_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

Este sistema possui somente a solução nula, pois o determinante da matriz de seus coeficientes é $\Pi_{i<j}(a_i - a_j) \neq 0$ (determinante de Vandermonde). Logo, $\mathscr{C}$ é uma base de V^*. Podemos nos perguntar se $\mathscr{C}$ é a base dual de alguma base $\mathscr{B} = \{p_0, \ldots, p_n\}$ de V. Para[1] tanto, devemos ter $p_j(a_i) = \Lambda_i(p_j) = \delta_{ij}$, logo,

$$p_j(x) = \frac{\Pi_{i\neq j}(x - a_i)}{\Pi_{i\neq j}(a_j - a_i)},$$

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Pelo ítem (3) da proposição (1.3), temos, para qualquer $p \in \mathsf{V}$,

$$p = \Lambda_0(p)p_0 + \ldots + \Lambda_n(p)p_n = p(a_0)p_0 + \ldots + p(a_n)p_n.$$

A fórmula acima é conhecida como *fórmula de interpolação de Lagrange* e mostra que, um polinômio de grau n fica completamente determinado a partir de seus valores em $n+1$ pontos distintos.

Sejam $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathscr{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de V e $\mathscr{B}^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $\mathscr{C}^* = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, suas respectivas bases duais. Tomando $a_{jk} \in \mathbb{F}$, $1 \leq j, k \leq n$, tais que $v_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}u_k$, observamos que

$$\delta_{ij} = \psi_i(v_j) = \sum_{k=1}^n a_{jk}\psi_i(u_k),$$

para $1 \leq i, j \leq n$. Escrevendo $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ e $B = (\psi_i(u_j))_{1\leq i,j\leq n}$, a relação acima mostra que $B = (A^t)^{-1}$. Como as colunas da matriz B são exatamente as coordenadas dos funcionais lineares que compoem $\mathscr{C}^*$ em relação à base $\mathscr{B}^*$, segue que a matriz B determina a base dual $\mathscr{C}^*$. Esta relação pode ser usada na prática, conforme mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.9 Sejam $\mathsf{V} = \mathbb{F}^4$, $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica e $\mathscr{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, com $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_1 + e_4$, $v_3 = e_2 - 2e_3$ e $v_4 = e_1 + e_2 + e_3$. Vamos determinar a base dual $\mathscr{C}^*$. Escalonando, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que $\mathscr{C}^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$, com $\psi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(3x_1 + x_3 - x_4)$, $\psi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$, $\psi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(x_1 - x_3 - x_4)$ e $\psi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4)$, onde (x_1, x_2, x_3, x_4) denotam as coordenadas em relação à base canônica.

[1]Veremos adiante que este é sempre o caso, para qualquer base de V^*.

Exercícios

1. Para cada base $\mathscr{B}$ do espaço vetorial V, calcule a base dual de $\mathscr{B}$:

   (a) $\mathsf{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{B} = \{(1,2,3),(0,-1,1/2),(3,0,-5)\}$;

   (b) $\mathsf{V} = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathscr{B} = \{1+x, 1-2x, x^2+x, x^3\}$;

   (c) $\mathsf{V} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ e $\mathscr{B} = \{T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\}$, onde T_{ij} é o operador cuja matriz na base canônica tem todas as entradas nulas, exceto na posição ij que vale 1, para $1 \leq i, j \leq 2$.

2. Sobre o espaço $\mathsf{V} = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, considere os funcionais lineares

$$\varphi_j(p) = \int_0^{a_j} p(x)dx,$$

   onde $j = 0,1,2$ e $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ e $a_2 = 2$.

   (a) Encontre um conjunto linearmente independente $\{p_0, p_1, p_2\} \subset \mathsf{V}$ tal que $\varphi_j(p_i) = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq 2$.

   (b) Conclua que $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ é uma base de V^*.

3. Seja $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ um subespaço e φ um funcional linear sobre W. Mostre que existe um funcional linear $\tilde{\varphi}$ sobre V cuja restrição a W coincide com φ.

4. Seja $\mathscr{C} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ uma base de V^* e $v_1, \ldots, v_n \in \mathsf{V}$ tais que $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Mostre que $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V cuja dual é $\mathscr{C}$.

5. Mostre que todo operador linear $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ é da forma $Tu = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_m(u))$, onde $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ são funcionais lineares em $\mathbb{F}^n$.

6. Mostre que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, para quaisquer $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

7. Neste exercício, vamos mostrar que a função traço é o único funcional linear $\varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ tal que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, para quaisquer $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ e $\varphi(I) = n$. Para tanto, fixemos um tal φ.

   (a) Sejam E_{ij} as matrizes definidas no exercício anterior. Calcule $E_{11}E_{1j}$ e $E_{1j}E_{11}$ e conclua que $\varphi(E_{1j}) = 0$ para $1 < j \leq n$. Use o mesmo argumento para concluir que $\varphi(E_{ij}) = 0$ se $i \neq j$.

   (b) Mostre que $E_{1j}E_{j1} - E_{j1}E_{1j} = E_{11} - E_{jj}$ e conclua que $\varphi(E_{jj}) = \varphi(E_{11})$, para cada $j = 2, \ldots, n$. Como $\varphi(I) = n$, segue que $\varphi = \operatorname{tr}$.

8. Para cada $M \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, considere o funcional linear $\varphi_M : \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ dado por $\varphi_M(A) = \operatorname{tr}(M^t A)$, $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Mostre que a aplicação

$$\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F}) \ni M \mapsto \varphi_M \in M \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})^*$$

   é um isomorfismo linear.

9. Mostre que todo $\varphi \in \mathsf{V}^*$ não-nulo é sobrejetor. Conclua que, nestas circunstâncias, $\dim\ker\varphi = \dim\mathsf{V} - 1$.

10. Se $\dim\mathsf{V} = n$ e $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é um subespaço de dimensão $n-1$, mostre que existe $\varphi \in \mathsf{V}^*$ tal que $\ker\varphi = \mathsf{W}$. Mostre que φ *não é* único, em geral.

11. Sejam $\varphi, \psi \in \mathsf{V}^*$. Mostre que $\ker\varphi \supset \ker\psi$ se e só se existe $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $\varphi = \alpha\psi$.

12. Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathsf{V}^*$ e assuma que $\ker\varphi \supset \ker\varphi_1 \cap \ldots \cap \ker\varphi_k$.

    (a) Mostre que a aplicação $T : \mathsf{V} \in v \mapsto (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_k(v)) \in \mathbb{F}^k$ é linear e $\ker T = \ker\varphi_1 \cap \ldots \cap \ker\varphi_k$.

    (b) Seja $\mathsf{W} = \operatorname{Im} T \subset \mathbb{F}^k$ e defina $\Lambda : \mathsf{W} \to \mathbb{F}$ por $\Lambda(\varphi_1(v), \ldots, \varphi_k(v)) = \varphi(v)$, $v \in \mathsf{V}$. Mostre que Λ é bem-definida e que existe $\tilde{\Lambda} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}$ que coincide com Λ em W.

    (c) Use o corolário (1.5) para concluir que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ tais que $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_k\varphi_k$.

1.2 Anuladores

Dado um subespaço $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$, definimos

$$\mathsf{W}^o \doteq \{\varphi \in \mathsf{V}^* : \varphi(w) = 0 \text{ para todo } w \in \mathsf{W}\}.$$

Veremos que este subespaço *determina* W, no sentido que, conhecer W é o mesmo que conhecer W^o. A proposição a seguir é o primeiro passo nesta direção.

Proposição 1.10 Seja $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ um subespaço. Então $\mathsf{W}^o \subset \mathsf{V}^*$ é um subespaço e $\dim \mathsf{W}^o = \dim \mathsf{V} - \dim \mathsf{W}$.

Prova. Evidentemente, W^o é um subespaço de V^*. Sejam $\{w_1, \ldots, w_k\}$ uma base de W, $\{w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ uma base de V e $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n\}$ sua base dual. A proposição fica demonstrada se provarmos que $\{\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n\}$ é uma base de W^o. Evidentemente, $\varphi_\in \mathsf{W}^o$, para $k+1 \le j \le n$. Além disso, dado $\varphi \in \mathsf{W}^o$, temos, pelo ítem (4) da proposição (1.3), que

$$\varphi = \varphi(w_1)\varphi_1 + \ldots + \varphi(w_k)\varphi_k + \varphi(w_{k+1})\varphi_{k+1} + \ldots + \varphi(w_n)\varphi_n = \varphi(w_{k+1})\varphi_{k+1} + \ldots + \varphi(w_n)\varphi_n,$$

provando o desejado. ∎

Se $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é um subespaço de dimensão k e $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k}\}$ é uma base de W^o, temos que

$$w \in \mathsf{W} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1(w) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \varphi_{n-k}(w) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Assim, encontrar uma base para W^o implica, na prática, em encontrar um sistema linear com n incógnitas e $n-k$ equações cujo espaço-solução é exatamente o subespaço W. Decorre desta mesma argumentação que, encontrar uma base para W^o implica, na prática, em encontrar $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} \in \mathsf{V}^*$ linearmente independentes tais que

$$\mathsf{W} = \ker\varphi_1 \cap \ldots \cap \ker\varphi_{n-k}.$$

Os subespaços que aparecem do lado direito da fórmula acima recebem um nome especial.

Definição 1.11 Um subespaço $\mathsf{Z} \subset \mathsf{V}$ é dito *hiperplano* se existir $\varphi \in \mathsf{V}^*$, $\varphi \neq 0$, tal que $\ker\varphi = \mathsf{Z}$.

Os comentários anteriores à definição (1.11) provam a proposição abaixo.

Proposição 1.12 Se $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é um subespaço de dimensão k e $\dim \mathsf{V} = n$ então existem hiperplanos $\mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{n-k}$ tais que $\mathsf{W} = \mathsf{Z}_1 \cap \ldots \cap \mathsf{Z}_{n-k}$.

O teorema do núcleo e da imagem e o exercício (9) da seção anterior mostram que se $\dim \mathsf{V} = n$ e $\mathsf{Z} \subset \mathsf{V}$ é um hiperplano então $\dim \mathsf{Z} = n-1$. Reciprocamente, se $\mathsf{Z} \subset \mathsf{V}$ é um subespaço de dimensão $n-1$, seja $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ uma base de Z. Tomando um vetor qualquer $u \notin \mathsf{Z}$, temos que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de Z, onde escolhemos $u_n = u$. Se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é a base dual, então $\mathsf{Z} = \ker \varphi_n$. Isso prova a proposição abaixo.

Proposição 1.13 Um subespaço $\mathsf{Z} \subset \mathsf{V}$ é um hiperplano se e só se $\dim \mathsf{Z} = \dim \mathsf{V} - 1$.

A proposição abaixo caracteriza os hiperplanos de $\mathbb{F}^n$ através do corolário (1.5).

Proposição 1.14 Um subespaço $\mathsf{Z} \subset \mathbb{F}^n$ é um hiperplano se e só se existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$\mathsf{Z} = \{(x_1, \ldots, x_n) : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\}.$$

Exercícios

1. Neste problema, o subespaço gerado por um conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ será denotado por $\mathsf{S}(u_1, \ldots, u_n)$. Para cada subespaço $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ abaixo, encontre uma base para W^o:

   (a) $\mathsf{V} = \mathbb{F}^6$ e $\mathsf{W} = \mathsf{S}(u_1, u_2, u_3)$, onde $u_1 = (1,2,0,-1,1,4)$, $u_2 = (0,1,2,4,0,2)$, $u_3 = (1,-1,0,1,4,-3)$;

   (b) $\mathsf{V} = \mathbb{F}^5$ e $\mathsf{W} = \mathsf{S}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, onde $u_1 = (0,1,0,0,1)$, $u_2 = (1,2,-1,2,0)$, $u_3 = (0,-1,3,0,2)$ e $u_4 = (1,4,-4,2,-1)$;

2. Considere os subespaços W dados a seguir a partir de um conjunto de geradores e obtenha um sistema linear cujo espaço solução seja W.

   (a) $\mathsf{V} = \mathbb{F}^3$ e $\mathsf{W} = \mathsf{S}(u_1, u_2)$, onde $u_1 = (1,-1,4)$, $u_2 = (4,0,2)$;

   (b) $\mathsf{V} = \mathbb{F}^5$ e $\mathsf{W} = \mathsf{S}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, onde $u_1 = (0,1,0,0,1)$, $u_2 = (1,2,-1,2,0)$, $u_3 = (0,-1,3,0,2)$ e $u_4 = (1,4,-4,2,-1)$;

   (c) $\mathsf{V} = \mathbb{F}^6$ e $\mathsf{W} = \mathsf{S}(u_1, u_2, u_3)$, onde $u_1 = (1,2,3,-1,2,0)$, $u_2 = (0,1,0,4,1,2)$, $u_3 = (1,4,3,7,4,4)$;

3. Encontre uma base para o espaço solução de cada um dos sistemas lineares abaixo:

   (a) $\mathsf{V} = \mathbb{R}^6$, $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 4x_5 + x_6 & = & 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_4 - 2x_6 & = & 0 \end{array} \right.$

   (b) $\mathsf{V} = \mathbb{R}^4$, $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$

4. Seja $T : \mathsf{V}_1 \to \mathsf{V}_2$ linear e $\mathsf{W}_1 \subset \mathsf{V}_1$, $\mathsf{W}_2 \subset \mathsf{V}_2$ subespaços. Mostre que $T(\mathsf{W}_1) \subset \mathsf{W}_2$ se e só se $T^t(\mathsf{W}_2^o) \subset \mathsf{W}_1^o$.

1.3 O espaço bidual

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita n, podemos considerar seu espaço dual V^*, o qual, como vimos, também é um espaço vetorial de dimensão n. Podemos repetir o processo e considerar o espaço dual de V^*, o qual é chamado de *bidual de* V^* e denotado por V^{**}.

Qual a natureza dos elementos de V^{**}? Seus elementos são funcionais lineares sobre V^*. O funcional mais natural deste tipo é o seguinte: para cada $v \in \mathsf{V}$, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Lambda_v : \mathsf{V}^* &\to \mathbb{F} \\ \varphi &\mapsto \varphi(v). \end{aligned}$$

O leitor deve precaver-se para interpretar corretamente a definição de Λ_v: na expressão $\varphi(v)$, estamos acostumados a pensar φ fixo em V^* e v variando em V. A idéia agora é que *v é fixo e φ varia em* V^*. Evidentemente, $\Lambda_v \in \mathsf{V}^{**}$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathsf{V} &\to \mathsf{V}^{**} \\ v &\mapsto \Lambda_v \end{aligned} \tag{1.1}$$

é linear. Para calcular o núcleo de Λ, precisamos do fato abaixo.

Proposição 1.15 Um vetor $v \in \mathsf{V}$ é não-nulo se e só se existe $\varphi \in \mathsf{V}^*$ tal que $\varphi(v) \neq 0$.

Prova. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V tal que $v_1 = v$ e $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a base dual. Então, $\varphi_1(v) = \varphi_1(v_1) = 1 \neq 0$. ∎

Observação 1.16 É interessante notar a dualidade do enunciado da proposição anterior. Por definição, um funcional linear $\varphi \in \mathsf{V}^*$ é não-nulo se e só existe um vetor $v \in \mathsf{V}$ tal que $\varphi(v) \neq 0$. A referida proposição diz que um vetor $v \in \mathsf{V}$ é não-nulo se e só se existe um funcional linear $\varphi \in \mathsf{V}^*$ tal que $\varphi(v) \neq 0$.

Voltando à nossa aplicação $\Lambda : \mathsf{V} \to \mathsf{V}^{**}$, vemos que $\ker \Lambda = \{0\}$, pois $\Lambda_v = 0$ implica que $\varphi(v) = \Lambda_v(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in \mathsf{V}^*$, o que, pela proposição (1.15), implica em $v = 0$. Como $\dim \mathsf{V} = \dim \mathsf{V}^* = \dim \mathsf{V}^{**}$, segue que Λ é sobrejetora e, portanto, um isomorfismo linear. Em particular, todo $\Phi \in \mathsf{V}^{**}$ é da forma Λ_v, para algum $v \in \mathsf{V}$. Estas afirmações provam o seguinte teorema.

Teorema 1.17 A aplicação Λ definida em (1.1) é um isomorfismo linear. Em particular, todo $\Phi \in \mathsf{V}^{**}$ é da forma Λ_v, para algum $v \in \mathsf{V}$.

A aplicação Λ é chamada, às vezes, de *isomorfismo canônico* entre V e V^{**}, pois sua definição independe de escolhas de bases.

Corolário 1.18 Se $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é um subespaço então $\mathsf{W}^{oo} = \Lambda(\mathsf{W})$. Em outras palavras, W é totalmente determinado por W^o.

Prova. Evidentemente, $\Lambda(\mathsf{W}) \subset \mathsf{W}^{oo}$. Além disso, $\dim \mathsf{W}^{oo} = n - \dim \mathsf{W}^o = n - (n - \dim \mathsf{W}) = \dim \mathsf{W} = \dim \Lambda(\mathsf{W})$, portanto, $\mathsf{W}^{oo} = \Lambda(\mathsf{W})$. ∎

Corolário 1.19 Toda base de V^* é dual de alguma base de V.

Prova. Dada uma base $\mathscr{C} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de V^*, seja $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\} \subset \mathsf{V}^{**}$ a base dual. Pelo teorema (1.17), existem $v_1, \ldots, v_n \in \mathsf{V}$ tais que $\Phi_j = \Lambda_{v_j}$, para $j = 1, \ldots, n$. Como $\varphi_i(v_j) = \Lambda_{v_j}(\varphi_i) = \Phi_j(\varphi_i) = \delta_{ij}$, segue pelo exercício (4) da primeira seção que $\mathscr{C}$ é a base dual de $\{v_1, \ldots, v_n\}$. ∎

Exercícios

1. Mostre que se $X \subset \mathsf{V}$ é qualquer subconjunto não-vazio, então $\Lambda(S(X)) = X^{oo}$, onde $S(X)$ denota o subespaço gerado por X.

2. Sejam $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ uma base de V^* e $v_1, \ldots, v_n \in \mathsf{V}$ tais que a matriz $(\varphi_i(v_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ é inversível. Mostre que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V. (Isto generaliza o exercício (4) da primeira seção.)

3. Dado um subconjunto $Y \subset \mathsf{V}^*$, definimos o *subespaço anulado por* Y como
$$^{o}Y = \{v \in \mathsf{V} : \varphi(v) = 0 \text{ para todo } \varphi \in Y\}.$$
Prove as seguintes afirmações:
   (a) ^{o}Y é um subespaço de V.
   (b) Se $\mathsf{Z} \subset \mathsf{V}^*$ é um subespaço então $\dim {}^{o}\mathsf{Z} = \dim \mathsf{V} - \dim \mathsf{Z}$.
   (c) Se W é um subespaço de V então $^{o}(\mathsf{W}^{o}) = \mathsf{W}$.
   (d) Se Z é um subespaço de V^* então $(^{o}\mathsf{Z})^{o} = \mathsf{Z}$.
   (e) Em geral, se $X \subset \mathsf{V}$ e $Y \subset \mathsf{V}^*$ são subconjuntos quaisquer, então $^{o}(X^{o}) = S(X)$ e $(^{o}Y)^{o} = S(Y)$, onde $S(A)$ denota o subespaço gerado pelo conjunto A.
   (f) Analise a relação entre os ítens (c),(d) e o teorema (1.17). Analise também a relação entre o ítem (b) e a proposição (1.10).

1.4 O operador transposto

Dados espaços vetoriais V, W sobre $\mathbb{F}$ e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$, podemos construir a partir de T um operador de composição à direita
$$\begin{array}{rcl} T' : \mathscr{L}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) & \to & \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{Z}) \\ S & \mapsto & T'(S) \doteq S \circ T, \end{array}$$
onde Z é qualquer espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. As propriedades do operador T', de verificação imediata, são enumeradas na proposição a seguir.

Proposição 1.20 São verdadeiras as seguintes afirmações a respeito de um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$:

1. $T'(S) \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{Z})$;

2. T' é linear;

3. Dados $U \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos $(T + \lambda U)' = T' + \lambda U'$;

4. Se $I : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ é o operador identidade então $I' : \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{Z}) \to \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{Z})$ é o operador identidade;

5. Se $U \in \mathscr{L}(\mathsf{V}_1, \mathsf{V})$ então $(TU)' = U'T'$.

No caso especial em que $\mathsf{Z} = \mathbb{F}$, o operador T' construído acima é chamado de *transposto de* T e denotado por T^t. Mais explicitamente,
$$T^t : \mathsf{W}^* = \mathscr{L}(\mathsf{W}, \mathbb{F}) \ni \varphi \mapsto \varphi \circ T \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathbb{F}) = \mathsf{V}^*.$$

A próxima proposição relaciona transpostos e o anuladores.

Proposição 1.21 São verdadeiras as seguintes afirmações a respeito de $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{W})$:

1. $\ker T^t = (\operatorname{Im} T)^{\mathrm{o}}$;
2. $(\ker T)^{\mathrm{o}} = \operatorname{Im} T^t$;
3. $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^t$;
4. $\dim \ker T = \dim \ker T^t + \dim \mathsf{V} - \dim \mathsf{W}$. Em particular, $\dim \ker T = \dim \ker T^t$ se $\dim \mathsf{V} = \dim \mathsf{W}$.

Prova. Para provar a primeira afirmação, observamos que $\varphi \in \ker T^t$ se e só se $0 = T^t(\varphi) = \varphi \circ T$, o que ocorre se e só se φ se anula sobre $\operatorname{Im} T$.

Para a segunda afirmação, observamos que $\operatorname{Im} T^t \subset (\ker T)^{\mathrm{o}}$. Além disso, pelo teorema do núcleo e da imagem, pelo ítem anterior e pela proposição (1.10), segue que

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} T^t &= \dim \mathsf{W}^* - \dim \ker T^t \\ &= \dim \mathsf{W} - \dim (\operatorname{Im} T)^{\mathrm{o}} \\ &= \dim \operatorname{Im} T \\ &= \dim \mathsf{V} - \dim \ker T \\ &= \dim (\ker T)^{\mathrm{o}}. \end{aligned}$$

A equação acima prova as afirmações (2) e (3). Para (4), observamos que, pelo teorema do núcleo e da imagem, $\dim \operatorname{Im} T = \dim \mathsf{V} - \dim \ker T$ e $\dim \operatorname{Im} T^t = \dim \mathsf{W} - \dim \ker T^t$. A conclusão segue do ítem anterior. ∎

Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{W})$, $\mathscr{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$, $\mathscr{C} = \{w_1,\ldots,w_m\}$ bases de V e W, $\mathscr{B}^* = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$, $\mathscr{C}^* = \{\psi_1,\ldots,\psi_m\}$ suas respectivas bases duais e $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{F})$ a matriz de T em relação à $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$. Pela definição de T^t, temos que

$$(T^t\psi_i)(v_j) = \psi_i(Tv_j) = \psi_i\left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk} w_k\right) = a_{ji},$$

para $i = 1,\ldots,m$ e $j = 1,\ldots,n$. Assim,

$$T^t\psi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\varphi_j, \; i = 1,\ldots,m,$$

e, portanto, a matriz de T^t em relação às bases duais $\mathscr{C}^*$ e $\mathscr{B}^*$ é a *transposta de A*, i.e., a matriz $A^t = (a_{ji}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

Para finalizarmos esta seção, vamos estudar o operador T^{tt}. Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{W})$, temos que $T^t \in \mathscr{L}(\mathsf{W}^*,\mathsf{V}^*)$, e, portanto, $T^{tt} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}^{**},\mathsf{W}^{**})$. Como já vimos, os espaços $\mathsf{V}^{*}{*}$ e $\mathsf{W}^{*}{*}$ são, a menos de isomorfismo, os próprios espaços V e W, respectivamente. Sendo assim, é natural estudarmos a relação entre T e T^{tt}. Na discussão a seguir, usaremos a mesma letra Λ para denotar os isomorfismos canônicos $\mathsf{V} \to \mathsf{V}^{**}$ e $\mathsf{W} \to \mathsf{W}^{**}$.

Proposição 1.22 O diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} \mathsf{V} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Lambda"'] & \mathsf{W} \arrow[d, "\Lambda"] \\ \mathsf{V}^{**} \arrow[r, "T^{tt}"'] & \mathsf{W}^{**} \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $\Lambda \circ T = T^{tt} \circ \Lambda$.

Prova. Dado $v \in \mathsf{V}$, temos que $(\Lambda \circ T)(v) = \Lambda_{Tv}$. Dado qualquer $\psi \in \mathsf{W}^*$, temos

$$\Lambda_{Tv}(\psi) = \psi(Tv) = (T^t\psi)(v) = \Lambda_v(T^t\psi) = T^{tt}(\Lambda_v)(\psi),$$

logo, $\Lambda_{Tv} = T^{tt}(\Lambda_v) = (T^{tt} \circ \Lambda)(v)$, como queríamos. ∎

Exercícios

1. Prove a proposição (1.20).
2. Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $u \in \mathsf{V}$ um vetor não-nulo tal que $Tu = \lambda u$ para um certo $\lambda \in \mathbb{F}$. Mostre que existe $\varphi \in \mathsf{V}^*$ não-nulo tal que $T^t\varphi = \lambda\varphi$.
3. Use a proposição (1.22) para dar outra prova do ítem (2) da proposição (1.21).
4. Seja $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ um subespaço e $i : \mathsf{W} \to \mathsf{V}$ o *operador de inclusão* definido por $i(w) = w$, $w \in \mathsf{W}$.
   (a) Mostre que $i^t : \mathsf{V}^* \to \mathsf{W}^*$ coincide com o *operador* $r : \mathsf{V}^* \to \mathsf{W}^*$ *de restrição a* W dado por $r(\varphi) = \varphi|_{\mathsf{W}}$, $\varphi \in \mathsf{V}^*$.
   (b) Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{W})$ e admita que $\mathsf{W} \subset \mathsf{Z}$ seja um subespaço. Considere o operador $T_1 = i \circ T \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{Z})$, onde $i : \mathsf{W} \subset \mathsf{Z}$ denota o operador de inclusão. Mostre que $T_1^t = T^t \circ r$.
5. Mostre que φ^t é injetor para qualquer $\varphi \in \mathsf{V}^*$ não-nulo.
6. Dados $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{W})$ e $\mathsf{Z} \subset \mathsf{W}$ um subespaço, mostre que $\operatorname{Im} T \subset \mathsf{Z}$ se e só se $\mathsf{Z}^{\mathrm{o}} \subset \ker T^t$.

1.5 Somas diretas e projeções

A *soma* de dois subespaços $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2 \subset \mathsf{V}$ é definida por

$$\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2 \doteq \{w_1 + w_2 : w_i \in \mathsf{W}_i\,,\ i = 1,2\}.$$

É imediato verificar que $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ é, de fato, um subespaço de V. Observando a própria definição de $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$, surge naturalmente a seguinte pergunta: *a maneira de expressar um vetor em* $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ *como soma de vetores em* W_1 *e* W_2 *é única?* Em geral, um elemento $w \in \mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2$ pode admitir dupla representação como $w = w + 0 = 0 + w$. Se assumirmos que um certo $w \in \mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ admite duas representações $w = w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$, então $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$. Isso mostra que $v_1 = w_1' - w_1, v_2 = w_2' - w_2 \in \mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2$, e, portanto, as possíveis representações de w são da forma $w = (w_1 + v_1) + (w_2 + v_2)$ onde $v_1, v_2 \in \mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2$. Em particular, no caso em que $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2 = \{0\}$, segue que os elementos de $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ têm representação única. A proposição a seguir, cuja prova é deixada como exercício, mostra quando a decomposição estudada é única.

Proposição 1.23 As seguintes afirmações são verdadeiras a respeito dos subespaços $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2 \subset \mathsf{V}$:

① Todo elemento de $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ admite representação única como soma $w_1 + w_2$, onde $w_i \in \mathsf{W}_i$, $i = 1,2$.

② $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2 = \{0\}$.

Se qualquer uma das condições acima for verificada, a soma $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ é denotada por $\mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$.

Suponhamos que $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2 \subset \mathsf{V}$ sejam tais que $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$. Isto significa que para cada $w \in \mathsf{V}$ existem $w_i \in \mathsf{W}_i$, $i = 1,2$, tais que $w = w_1 + w_2$. Uma expressão deste tipo será chamada doravante de *decomposição de* w. Podemos definir, pela unicidade da decomposição, uma função $P : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ pondo $Pw = w_1$, $w \in \mathsf{W}$. A proposição abaixo descreve as propriedades de P.

Proposição 1.24 São verificadas as seguintes propriedades:

1. $P \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$;
2. $\operatorname{Im} P = \mathsf{W}_1$ e $\ker P = \mathsf{W}_2$;
3. $P^2 = P$.

Prova. Para ver que P é linear, observamos que se $w = w_1 + w_2$ e $w' = w_1' + w_2'$ são decomposições de $w, w' \in \mathsf{V}$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, então $w + \lambda w' = (w_1 + \lambda w_1') + (w_2 + \lambda w_2')$ é uma decomposição de $w + \lambda w'$, portanto, por unicidade da decomposição e pela definição de P, segue que $P(w + \lambda w') = w_1 + \lambda w_1' = Pw + \lambda P w'$.

Qualquer $w \in \mathsf{W}_1$ se decompoe como $w = w + 0$, portanto, $Pw = w$. Em particular, $P^2 = P$ e $\mathsf{W}_1 \subset \operatorname{Im} P$. Como $\operatorname{Im} P \subset \mathsf{W}_1$, segue que $\operatorname{Im} P = \mathsf{W}_1$. Claramente, $Pw = 0$ se $w \in \mathsf{W}_2$. Além disso, se $w \in \mathsf{V}$ e $Pw = 0$, segue que $w_1 = 0$ e portanto, $w = w_2 \in \mathsf{W}_2$. Assim, $\ker P = \mathsf{W}_2$. ∎

O tipo de operador descrito na proposição é tão frequente que recebe um nome especial.

Definição 1.25 Um operador $P \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é chamado de *projeção* se $P^2 = P$.

Conclusões inteiramente análogas àquelas obtidas na proposição (1.24) são válidas para o operador $\mathsf{V} \ni w = w_1 + w_2 \mapsto w_2 \in \mathsf{V}$, o qual, evidentemente, coincide com o $I - P$. Assim, a cada decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$ corresponde um par de projeções $P_1 = P$ e $P_2 = I - P$ tais que $\operatorname{Im} P_1 = \ker P_2 = \mathsf{W}_1$, $\operatorname{Im} P_2 = \ker P_1 = \mathsf{W}_2$, $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ e $P_1 + P_2 = I$.

É razoável perguntarmos se o processo descrito acima pode ser *invertido*, i.e., se a partir de um par de projeções satisfazendo as mesmas propriedades que P_1 e P_2 produz uma decomposição de V. A resposta é afirmativa, conforme a proposição abaixo.

Proposição 1.26 Dadas projeções $P_1, P_2 \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ satisfazendo $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ e $P_1 + P_2 = I$, existe uma única decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ satisfazendo $\operatorname{Im} P_1 = \ker P_2 = \mathsf{W}_1$, $\operatorname{Im} P_2 = \ker P_1 = \mathsf{W}_2$. Além disso, P_1, P_2 são exatamente as projeções associadas à decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$.

Prova. Definamos $\mathsf{W}_1 = \operatorname{Im} P_1$, $\mathsf{W}_2 = \operatorname{Im} P_2$ e mostremos que $\mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2 = \mathsf{V}$. De fato, qualquer $v \in \mathsf{V}$ se escreve como $v = P_1 v + (I - P_1) v$. A primeira parcela desta soma pertence a W_1 e, como $P_1(I - P_1) v = 0$, segue que a segunda parcela pertence a $\ker P_1 = \mathsf{W}_2$. Logo, $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$. Além disso, se $u \in \mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2$, temos que $u = P_1 u$ e $u = P_2 u$, donde, $P_1 u = P_2 u$. Aplicando P_1 à última igualdade, temos que $u = P_1 u = 0$. ∎

Corolário 1.27 A cada projeção $P \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ corresponde de maneira unívoca uma decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$ tal que $\operatorname{Im} P = \mathsf{W}_1$ e $\ker P = \mathsf{W}_2$. A projeção P é dita *projeção sobre* W_1 *paralelamente a* W_2.

A proposição a seguir, cuja prova é deixada como exercício, resume diversas propriedades das projeções.

Proposição 1.28 São equivalentes as seguintes afirmações a respeito de um operador $P \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$:

① P é uma projeção.

② P^t é uma projeção.

③ $\mathsf{V} = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$.

④ $P(I-P) = 0$.

⑤ $\ker P = \operatorname{Im} I - P$.

⑥ $I - P$ é uma projeção.

⑦ O operador $S = 2P - 1$ satisfaz $S^2 = I$. (Um tal operador é chamado de *involução*.)

Para finalizar esta seção, vamos estudar a dimensão de uma soma $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$. Para tanto, consideremos a aplicação linear $T : \mathsf{W}_1 \times \mathsf{W}_2 \to \mathsf{V}$ dada por $T(w_1, w_2) = w_1 + w_2$, $w_i \in \mathsf{W}_i$, $i = 1,2$. Vemos que $\ker T = \mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2$ e $\operatorname{Im} T = \mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$, logo, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que $\dim(\mathsf{W}_1 \times \mathsf{W}_2) = \dim(\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2) + \dim(\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2)$. Mas, claramente, $\dim(\mathsf{W}_1 \times \mathsf{W}_2) = \dim \mathsf{W}_1 + \dim \mathsf{W}_2$, pois se $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_m\}$ são bases de $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2$, respectivamente, então

$$\{(u_1, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_m)\}$$

é uma base de $\mathsf{W}_1 \times \mathsf{W}_2$. Sendo assim, a proposição a seguir está demonstrada.

Proposição 1.29 Se $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2 \subset \mathsf{V}$ são subespaços, então

$$\dim(\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2) = \dim \mathsf{W}_1 + \dim \mathsf{W}_2 - \dim(\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2)\,.$$

Em particular, no caso de somas diretas, temos $\dim(\mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2) = \dim \mathsf{W}_1 + \dim \mathsf{W}_2$.

Exercícios

1. Complete os detalhes da prova da proposição (1.23)

2. Mostre que $(\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2)^{\mathrm{o}} = \mathsf{W}_1^{\mathrm{o}} \cap \mathsf{W}_2^{\mathrm{o}}$ e $(\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2)^{\mathrm{o}} = \mathsf{W}_1^{\mathrm{o}} + \mathsf{W}_2^{\mathrm{o}}$.

3. Em $\mathsf{V} = \mathbb{R}^2$, sejam $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2$ as retas passando pela origem de equações $y = a_1 x$ e $y = a_2 x$, com $a_1 \neq a_2$. Mostre que $\mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2 = \mathsf{V}$ e calcule a matriz, em relação à base canônica, da projeção sobre W_1 paralelamente a W_2.

4. Em $\mathsf{V} = \mathbb{R}^3$, considere W_1 o subespaço dado pela equação $x + y + z = 0$ e W_2 a reta que passa pela origem e tem a direção do vetor $u = (1, 1, -1)$.

   (a) Mostre que $\mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2 = \mathbb{R}^3$.

   (b) Calcule a matriz da projeção sobre W_1 paralelamente a W_2 em relação à base canônica de V.

5. Em $\mathsf{V} = \mathbb{R}^5$, considere W_1 o subespaço gerado pelos vetores $u_1 = (1,0,2,-1,3)$, $u_2 = (0,2,3,-2,1)$, $u_3 = (2,1,1,-1,2)$ e $u_4 = (1,-4,-4,3,1)$ e W_2 o espaço solução do sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_5 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

   (a) Encontre bases $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ para W_1 e W_2, respectivamente.

   (b) Encontre bases $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ para $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2$ e $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$, respectivamente, de forma que $\mathscr{C}_2 \subset \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$.[2]

6. Prove a proposição (1.28).

7. Mostre que P é uma projeção com imagem W se e só se P^t é uma projeção com núcleo W^{o}.

8. Sejam P, Q projeções em V tais que $PQ = QP$. Mostre que PQ é uma projeção com núcleo $\ker P + \ker Q$ e imagem $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$.

9. Sejam $\mathsf{V} = M_n(\mathbb{F})$ e $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2$ os subconjuntos de V formados pelas matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

   (a) Mostre que $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2$ são subespaços de V e $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2 = \{0\}$.

   (b) Mostre que $\mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2 = \mathsf{V}$.

   (c) Calcule as projeções correspondentes à decomposição em soma direta dada pelo ítem anterior.

10. Seja V o espaço vetorial formado pelas funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{F}$. Dizemos que $f \in \mathsf{V}$ é *simétrica* se $f(x,y) = f(y,x)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A função f é dita *anti-simétrica* se $f(x,y) = -f(y,x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considere os subconjuntos $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2$ de V formados pelas funções simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

    (a) Mostre que $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2$ são subespaços de V e $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2 = \{0\}$.

    (b) Mostre que $\mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2 = \mathsf{V}$.

    (c) Calcule as projeções correspondentes à decomposição em soma direta dada pelo ítem anterior.

11. Sejam $\mathsf{V}_1, \mathsf{V}_2$ e $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2$ subespaços de V e W, respectivamente, tais que $\mathsf{V} = \mathsf{V}_1 \oplus \mathsf{V}_2$ e $\mathsf{W} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$ e seja $T : \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ uma transformação linear tal que $T(\mathsf{V}_j) \subset \mathsf{W}_j$, $j = 1,2$.

    (a) Mostre que existem únicos operadores lineares $T_1 : \mathsf{V}_1 \to \mathsf{W}_1$ e $T_2 : \mathsf{V}_2 \to \mathsf{W}_2$ tais que $T(w_1 + w_2) = T_1(w_1) + T_2(w_2)$ para quaisquer $w_1 \in \mathsf{W}_1$, $w_2 \in \mathsf{W}_2$. Neste caso, dizemos que T é a *soma direta* de T_1 e T_2, fato denotado por $T = T_1 \oplus T_2$.

    (b) Mostre que $\ker T = \ker T_1 \oplus \ker T_2$ e $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T_1 \oplus \operatorname{Im} T_2$.

    (c) Fixando bases $\mathscr{B}_i$ em V_i e $\mathscr{C}_i$ em W_i, sejam A, B as matrizes de T_i em relação à estas bases, para $i = 1,2$. Calcule a matriz de T em relação às bases $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ e $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.

12. Mostre que se $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é um subespaço então existe um subespaço $\mathsf{Z} \subset \mathsf{V}$ tal que $\mathsf{W} \oplus \mathsf{Z} = \mathsf{V}$.

[2] É possível modificar $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ e $\mathscr{C}_1$ de forma que, além da última inclusão, tem-se também que $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$. Isso é mais difícil de mostrar: você está desafiado a tentar!

13. Dadas projeções $P, Q \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, verifique que as afirmações abaixo são verdadeiras:

   (a) $P + Q$ é uma projeção.
   (b) $PQ + QP = 0$.
   (c) $PQ = QP = 0$.

   Nestas condições $P + Q$ é um projeção com imagem $\operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im} Q$.

Capítulo 2

Formas canônicas

2.1 Polinômios característico e minimal

Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, dizemos que $u \in \mathsf{V}$ não-nulo é um *autovetor* para T se existe $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $Tu = \lambda u$. O número λ é chamado de *autovalor* de T associado (ou correspondente) ao autovetor u. Em todo o texto, denotaremos o operador $T - \lambda I$ por $T - \lambda$.

A proposição abaixo é de grande importância prática.

Proposição 2.1 As seguintes afirmações são equivalentes a respeito de $\lambda \in \mathbb{F}$:

① Existe $u \in \mathsf{V}$ não-nulo tal que $Tu = \lambda u$.

② $T - \lambda$ não é inversível.

③ $\det(T - \lambda) = 0$.

Prova. A equivalência entre ① e ② decorre do fato que um operador $\mathsf{V} \to \mathsf{V}$ é inversível se e só se é injetor. A equivalência entre ② e ③ decorre do fato que um operador tem determinante zero se e só se não é inversível. ∎

A proposição anterior mostra que os autovalores de T são raízes da equação polinomial de grau n

$$\det(T - \lambda) = 0\,. \tag{2.1}$$

Como sabemos, uma tal equação possui, no máximo, n raízes. Abusando um pouco da linguagem, vamos chamar de *autovalor de T* qualquer raiz da equação (2.1). O conjunto de soluções da equação (2.1) é chamado de *espectro de T* e denotado por $\Sigma(T)$. O polinômio $p_T(\lambda) = \det(T - \lambda)$ é chamado de *polinômio característico de T*. A *multiplicidade algébrica* de um autovalor de T é sua multiplicidade como raiz da equação (2.1). O *autoespaço associado ao autovalor* $\lambda \in \mathbb{F}$ é o espaço $\ker(T - \lambda)$. A dimensão deste último espaço é chamada de *multiplicidade geométrica* do autovalor $\lambda \in \mathbb{F}$.

Um operador é dito *diagonalizável* se existe uma base de V formada exclusivamente por autovetores de T. Neste caso, a matriz de T em relação à esta base tem todas as entradas nulas, exceto, possivelmente, ao longo da diagonal, onde aparecem os autovalores de T. Dizemos que $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ é *diagonalizável* se o operador representado por A é relação à base canônica de $\mathbb{F}^n$ for diagonalizável. Para distinguir os casos real e complexo, dizemos que A é diagonalizável *sobre* $\mathbb{R}$ ou *sobre* $\mathscr{C}$, conforme o caso.

Seja $\mathbb{F}[X]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{F}$ munido das operações usuais de soma e produto de polinômios. Dado $p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_k X^k \in \mathbb{F}[X]$ e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, definimos

$p(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_k T^k \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. O leitor pode verificar sem dificuldade que $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$ e $(pq)(T) = p(T)q(T)$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{F}[X]$.

Lema 2.2 Existe $q \in \mathbb{F}[X]$ não-nulo tal que $q(T) = 0$.

Prova. Como $\dim \mathscr{L}(\mathsf{V}) = n^2$, o conjunto $\{I, T, \ldots, T^{n^2}\}$ é linearmente dependente. Portanto, existem $a_0, \ldots, a_{n^2} \in \mathbb{F}$ não todos nulos tais que $a_0 I + a_1 T + \ldots + a_{n^2} T^{n^2} = 0$. Tomando $q(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n^2} X^{n^2}$, temos que $q(T) = 0$. ∎

Considere o conjunto $I = \{q \in \mathbb{F}[X] : q(T) = 0\}$. Evidentemente, este conjunto é um ideal não-trivial de $\mathbb{F}[X]$, e portanto, existe um único polinômio mônico $q_T \in I$ tal que todo $q \in I$ é da forma $q = q_T q_1$ para algum $q_1 \in F[X]$. O polinômio q_T é chamado de *polinômio minimal de* T e é caracterizado pelas seguintes propriedades:

① $q_T(T) = 0$;

② Se $q(T) = 0$ então q_T divide q.

O exercício (6) desta seção contém mais detalhes sobre a construção do polinômio minimal. A proposição a seguir relaciona o polinômio característico e o polinômio minimal de T.

Proposição 2.3 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Então $p_T(\lambda) = 0$ se e só se $q_T(\lambda) = 0$.

Prova. Se $q_T(\lambda) = 0$, então existe $q \in \mathbb{F}[X]$ tal que $q_T(X) = (X - \lambda)q(X)$. Logo, $0 = q_T(T) = (T - \lambda)q(T)$. Como q tem grau estritamente menor que o grau de q_T, segue da definição de q_T que $q(T) \neq 0$. Em particular, existe $u \in \mathsf{V}$ tal que $v = q(T)u \neq 0$, e portanto, $(T - \lambda)v = 0$. Logo, λ é autovalor de T e $p_T(\lambda) = 0$.

Reciprocamente, admitamos que $q_T(\lambda) \neq 0$. Pelo algoritmo da divisão, existem $q \in \mathbb{F}[X]$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ tais que $q_T(X) = (X - \lambda)q(X) + \alpha$. Calculando em T, temos que $(T - \lambda)q(T) + \alpha I = 0$. Como $\alpha = q_T(\lambda) \neq 0$, então $(T - \lambda)^{-1} = -q(T)/\alpha$, e portanto, λ não é autovalor de T. ∎

Veremos adiante que, não só os polinômios característico e minimal têm as mesmas raízes como também q_T divide p_T, ou equivalentemente, $p_T(T) = 0$. Este fato é chamado de Teorema de Cayley-Hamilton.

Podemos definir os polinômios característico e minimal de qualquer matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ pondo $p_A = p_T$ e $q_A = q_T$, onde T é qualquer operador linear em um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{F}$ cuja matriz em relação a alguma base de V é A. Esta definição é independente de T, pois qualquer outro operador S em V com a mesma propriedade deve ser da forma $S = UTU^{-1}$ para algum operador inversível $U \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. Evidentemente, $p_S = p_T$ e $q_S = q_T$. Estas afirmações nos permitem falar indistintamente sobre polinômios característico e minimal tanto para matrizes quanto para operadores lineares.

Exemplo 2.4 Considere os operadores $T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ cujas matrizes em relação à base canônica são $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, respectivamente.

Temos que $p_{T_1}(\lambda) = q_{T_1}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, $p_{T_2}(\lambda) = q_{T_2}(\lambda) = (\lambda - 3)^2$, $p_{T_3}(\lambda) = q_{T_3}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - (1 + i))(\lambda - (1 - i))$ e $p_{T_4}(\lambda) = (\lambda + 2)^2$ e $q_{T_4}(\lambda) = \lambda + 2$. Vemos que $\Sigma(T_1) = \{1, 2\}$, $\Sigma(T_2) = \{3\}$, $\Sigma(T_3) = \{1 + i, 1 - i\}$ e $\Sigma(T_4) = \{-2\}$.

Exemplo 2.5 Considere os operadores $T_5, T_6 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ cujas matrizes em relação à base canônica são

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Temos que $p_{T_5}(\lambda) = q_{T_5}(\lambda) = p_{T_6}(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ e $q_{T_6}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$.

Exercícios

1. Determine os polinômios característico e minimal das matrizes abaixo:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (g) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -5 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Dados $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$, seja
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
   Mostre que $p_A(\lambda) = q_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$.

3. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$.

   (a) Mostre que T é inversível se e só se o termo independente de seu polinômio minimal é não-nulo.

   (b) Nestas circunstâncias, T^{-1} é um polinômio em T, i.e., existe $p \in \mathbb{F}[X]$ tal que $T^{-1} = p(T)$.

4. Seja $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{Z}$ uma decomposição de V e $P_{\mathsf{W}} : \mathsf{V} \to \mathsf{W} \subset \mathsf{V}$, $P_{\mathsf{Z}} : \mathsf{V} \to \mathsf{Z} \subset \mathsf{V}$ as projeções correspondentes. Calcule os polinômios característico e minimal de P_{W} e P_{Z}.

5. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ tal que $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Mostre que $\lambda = 1$ é autovalor de A. Prove que a mesma conclusão é válida se tivermos $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ para cada $j = 1, \ldots, n$.

6. Na construção do polinômio minimal de um operador linear usamos o fato que todo ideal não-trivial do anel de polinômios sobre $\mathbb{F}$ é gerado por um único elemento. Neste exercício, fornecemos uma prova deste fato.

   (a) Um subconjunto $I \subset \mathbb{F}[X]$ é dito *ideal* se for fechado por soma e multiplicação escalar e, se dados $p \in I$ e $q \in \mathbb{F}[X]$ quaisquer, tem-se que o produto pq pertence a I. Mostre que o *ideal gerado por* $p \in \mathbb{F}[X]$, definido por $\{pq : q \in \mathbb{F}[X]\}$ é um ideal de $\mathbb{F}[X]$. Este ideal será denotado por I_p.

(b) Seja $I \subset \mathbb{F}[X]$ um ideal não-nulo qualquer de $\mathbb{F}[X]$. Use o algoritmo da divisão para provar que existe um único $p \in I$ mônico (i.e., o coeficiente do termo de maior grau de p é 1) cujo grau é mínimo dentre todos os polinômios de I.

(c) Use o algoritmo da divisão para mostrar que $I = I_p$. Mostre que p é o *único* polinômio mônico de I com esta propriedade.

7. Prove as afirmações as afirmações a respeito de invariância dos polinômios característico e minimal feitas no parágrafo que antecede o exemplo (2.4).

8. Neste exercício, o leitor é convidado o provar que $p_{AB} = p_{BA}$ para quaisquer matrizes $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$.

(a) Se $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ é *inversível*, use o fato que $AB = B^{-1}(BA)B$ para provar que $p_{AB} = p_{BA}$.

(b) Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ qualquer e selecionemos vetores $Tu_1, \dots, Tu_k$ tais que $\{Tu_1, \dots, Tu_k\}$ seja uma base de $\operatorname{Im} T$. Mostre que $\{u_1, \dots, u_k\}$ é linearmente independente e pode ser completado a uma base $\mathscr{B} = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l\}$ de V, de forma que $v_1, \dots, v_l \in \ker T$.

(c) Mostre que a matriz de T em relação às bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C} = \{Tu_1, \dots, Tu_k, w_1, \dots, w_l\}$ é

$$\begin{pmatrix} I_{k\times k} & 0 \\ 0 & 0_{l\times l} \end{pmatrix}.$$

(d) Dada $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$, mostre que existem matrizes inversíveis $U, V \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ tais que

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} I_{k\times k} & 0 \\ 0 & 0_{l\times l} \end{pmatrix} V.$$

(e) Dada $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$, sejam B_{ij} matrizes tais que $B = V^{-1} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} U$. Mostre que

$$p_{AB}(\lambda) = (-1)^l \lambda^l p_{B_{11}}(\lambda) = p_{BA}(\lambda).$$

(f) Decorre das afirmações anteriores que AB e BA têm o mesmo polinômio característico, e, portanto, os mesmos autovalores. É verdade que $q_{AB} = q_{BA}$? O que deve ser verificado para que esta afirmação seja verdadeira?

9. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ uma matriz triangular. Mostre que $p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)$. Em particular, os elementos da diagonal de A são exatamente seus autovalores, contados de acordo com sua multiplicidade.

10. Suponhamos que $T = T_1 \oplus T_2$, conforme o exercício (11) da página 15. Mostre que $p_T = p_{T_1} \cdot p_{T_2}$ e $q_T = \mathrm{mdc}(q_{T_1}, q_{T_2})$. Generalize para uma soma direta qualquer de operadores.

11. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$.

(a) Mostre que se $\lambda \in \Sigma(T)$ se e só se $\overline{\lambda} \in \Sigma(T)$.

(b) Conclua que nas circunstâncias do enunciado, T possui uma quantidade *par* de autovalores complexos.

12. Mostre que se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão *ímpar* então todo $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tem pelo menos um autovalor real.

13. Mostre que $p_T = p_{T^t}$ e $q_T = q_{T^t}$ para qualquer $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$.

14. Mostre que se $X = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$, onde $A \in \mathrm{M}_{k\times k}(\mathbb{F})$, $C \in \mathrm{M}_{l\times l}(\mathbb{F})$, então $\det X = \det A \cdot \det C$. Conclua que $p_X = p_A \cdot p_C$. Pode-se afirmar algo, em geral, sobre q_X?

15. Sejam $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $p_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + s_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + s_1\lambda + s_0)$, onde $n = \dim \mathsf{V}$.

    (a) Mostre que $s_{n-1} = -\operatorname{tr} T$;

    (b) Mostre que $s_0 = (-1)^n \det T$;

    (c) O que se pode dizer, em geral, sobre s_j para $1 < j < n-1$?

16. Seja $S \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$.

    (a) Mostre que $\{0\} \subset \ker S \subset \ker S^2 \subset \ldots$ e $\mathsf{V} \supset \operatorname{Im} S \supset \operatorname{Im} S^2 \supset \operatorname{Im} S^3 \supset \ldots$.

    (b) Mostre que se $\ker S^n = \ker S^{n+1}$ então $\ker S^n = \ker S^{n+k}$ para qualquer inteiro positivo k. Prove um resultado análogo para a $\operatorname{Im} S^n$.

    (c) Mostre que existe um menor inteiro positivo n tal que $\ker S^n = \ker S^{n+1}$. Nestas circunstâncias, verifique que $\ker S^k \subsetneq \ker S^{k+1}$ para todo $k < n$. Prove um resultado análogo para $\operatorname{Im} S^n$.

    (d) Mostre que se $n \in \mathbb{N}$ é o menor inteiro tal que $\ker S^n = \ker S^{n+1}$ então n é o menor inteiro tal que $\operatorname{Im} S^n = \operatorname{Im} S^{n+1}$ ou seja, as cadeias de subespaços $\{0\} \subset \ker S \subset \ker S^2 \subset \ldots$ e $\mathsf{V} \supset \operatorname{Im} S \supset \operatorname{Im} S^2 \supset \operatorname{Im} S^3 \supset \ldots$ estacionam no mesmo n.

2.2 Subespaços invariantes

Um subespaço $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é dito *invariante* se $T(\mathsf{W}) \subset \mathsf{W}$. Exemplos evidentes de subespaços invariantes são o próprio V, o espaço trivial $\{0\}$, o núcleo e a imagem de T. A existência de subespaços invariantes é uma questão de grande relevância no estudo de um operador linear. Para tratar adequadamente o assunto, introduzimos o conceito de subespaços independentes.

Uma família de subespaços $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k \subset \mathsf{V}$ é dita *independente* se sempre que tivermos $w_1 + \ldots + w_k = 0$ com $w_i \in \mathsf{W}_i$ para $i = 1, \ldots, k$, então necessariamente $w_1 = \ldots = w_k = 0$. O leitor pode verificar sem dificuldade a seguinte proposição.

Proposição 2.6 Sejam $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k$ subespaços de V e suponhamos que $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 + \ldots + \mathsf{W}_k$. As seguintes afirmações são equivalentes:

① $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k$ são independentes.

② Cada $w \in \mathsf{V}$ se escreve de maneira única como $w = w_1 + \ldots + w_k$, com $w_i \in \mathsf{W}_i$, para cada $i = 1, \ldots, k$.

③ $\mathsf{W}_j \cap (\mathsf{W}_1 + \ldots + \widehat{\mathsf{W}_j} + \ldots + \mathsf{W}_k) = \{0\}$ para cada $j = 1, \ldots, k$.

④ Se $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_k$ são bases para $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k$, respectivamente, então $\mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_k$ é uma base de V.

Neste caso, escrevemos $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$.

A uma decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$ ficam associados operadores $P_1, \ldots, P_k$ definidos como $P_j(w) = w_j$, onde

$$w = w_1 + \ldots + w_k \tag{2.2}$$

com $w_i \in \mathsf{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$. Como já observamos oportunamente, a unicidade da decomposição (2.2) implica que cada P_j é um operador linear com imagem W_j. De fato, cada P_j é uma *projeção* com imagem W_j, i.e., $P_j^2 = P_j$, para $j = 1, \ldots, k$. É evidente que $P_i P_j = 0$ se $i \neq j$ e que $P_1 + \ldots + P_k = I$. Estes fatos são destacados a seguir.

Proposição 2.7 Dada uma decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$, existem únicos operadores lineares $P_1, \ldots, P_k \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tais que:

① $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ para todos $i, j = 1, \ldots, k$;

② $P_1 + \ldots + P_k = I$;

③ $\operatorname{Im} P_j = \mathsf{W}_j$ para cada $j = 1, \ldots, k$.

As projeções $P_1, \ldots, P_k$ são chamadas *projeções associadas à decomposição* $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$. A proposição a seguir descreve uma situação particularmente importante.

Proposição 2.8 Seja $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$ uma decomposição de V e $P_1, \ldots, P_k$ as projeções associadas. São equivalentes as seguintes afirmações:

① W_j é invariante por T, para todo $j = 1, \ldots, k$.

② $TP_j = P_j T$, para todo $j = 1, \ldots, k$.

Prova. É evidente que se $TP_j = P_j T$ então dado $u \in \mathsf{W}_j$, temos $Tu = TP_j u = P_j Tu$, portanto, $Tu \in \operatorname{Im} P_j = \mathsf{W}_j$.

Reciprocamente, suponhamos que $T(\mathsf{W}_j) \subset \mathsf{W}_j$ para cada $j = 1, \ldots, k$. Como

$$TP_1 + \ldots + TP_k = T = P_1 T + \ldots P_k T,$$

segue que $(TP_1 - P_1 T) + \ldots + (TP_k - P_k T) = 0$. Como $\operatorname{Im} TP_j \subset \mathsf{W}_j$, segue que $\operatorname{Im}(TP_j - P_j T) \subset \mathsf{W}_j$ para $j = 1, \ldots, k$. O resultado segue da independência de $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k$. ∎

No lema a seguir, consideramos uma família muito importante de subespaços independentes associados a um operador linear.

Lema 2.9 Se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ são autovalores distintos de T e $\mathsf{W}_j = \ker(T - \lambda_j)$, para $j = 1, \ldots, k$, então $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k$ é uma família independente de subespaços.

Prova. Provemos este fato por indução em k. Para $k = 1$ é evidente, pois $\mathsf{W}_1 \neq \{0\}$. Admitindo que $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_{k-1}$ é independente, tomemos $w_i \in \mathsf{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$, tais que $w_1 + \ldots + w_k = 0$. Aplicando $T - \lambda_k$ à última igualdade, temos que $(\lambda_1 - \lambda_k) w_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) w_{k-1} = 0$. Por hipótese indutiva, concluímos que $w_1 = \ldots = w_{k-1} = 0$ e isso implica que $w_k = 0$, como queríamos. ∎

A próxima proposição dá uma caracterização para um operador diagonalizável.

Proposição 2.10 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ diagonalizável e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ seus autovalores distintos. Existem projeções $P_1, \ldots, P_k$ tais que

① $T = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k$;

② $P_1 + \ldots + P_k = I$;

③ $P_i P_j = 0$ se $i \neq j$;

④ $\operatorname{Im} P_j = \ker(T - \lambda_j)$;

⑤ $TP_j = P_j T$, para cada $j = 1, \ldots, k$.

Reciprocamente, se existem projeções satisfazendo as condições acima, então T é diagonalizável e seus autovalores são $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Prova. Seja $\mathsf{W}_j = \ker(T - \lambda_j)$, $j = 1, \ldots, k$. Como T é diagonalizável, então $\mathsf{W}_1 + \ldots + \mathsf{W}_k = \mathsf{V}$. Pelo lema (2.9), $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k$ são independentes, portanto, o resultado segue das proposições (2.7) e (2.8). ∎

Embora o polinômio minimal de um operador seja mais difícil de determinar que o seu polinômio característico, existe um caso em que a situação é bastante simples, como descrevemos na proposição a seguir.

Proposição 2.11 Se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é diagonalizável e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ são seus autovalores distintos, então $q_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)$.

Prova. Mantenhamos a notação da proposição anterior e definamos $q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)$. Temos que

$$\begin{aligned} q(T)u &= (T - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (T - \lambda_k)(u_1 + \ldots + u_k) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (T - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{(T - \lambda_j)} \cdot \ldots \cdot (T - \lambda_k)(T - \lambda_j) u_j = 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que q_T divide q. Para mostrar que $q_T = q$, basta mostrar que nenhum polinômio da forma $p(X) = (X - \lambda_1) \cdot \ldots \widehat{(X - \lambda_j)} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)$ anula T. Fixando um tal p e tomando $u \in \mathsf{W}_j$ não-nulo, temos que

$$p(T)u = \left(\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i) \right) u \neq 0.$$

∎

Mais adiante, veremos que é verdadeira a recíproca desta última proposição: se q_T é um produto de fatores lineares então q_T é diagonalizável.

Exemplo 2.12 Consideremos os operadores T_1, T_2, T_3 e T_4 do exemplo (2.4). Temos que T_2 não é diagonalizável, pois seu polinômio minimal têm raízes repetidas. O operador T_3 do referido exemplo também não é diagonalizável (sobre $\mathbb{R}$), pois seus autovalores não pertencem a $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Tal operador é diagonalizável quando consideramos sua ação sobre $\mathbb{C}^2$. No caso de T_1, podemos mostrar imediatamente que $\dim\ker(T_1 - 1) = \dim\ker(T_1 - 2) = 1$, e portanto, T_1 é diagonalizável. Obviamente, $T_4 = -2I$ é diagonalizável.

Exemplo 2.13 O operador T_5 do exemplo (2.5) não é diagonalizável, pois seu polinômio minimal tem raízes repetidas. O operador T_6 do mesmo exemplo é diagonalizável, pois um cálculo simples mostra que $\dim\ker(T_6 - 1) = 2$ e $\dim\ker(T_6 - 2) = 1$.

Exercícios

1. Mostre que se $\dim \mathsf{V} = n$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ são autovalores distintos para T, então T é diagonalizável.

2. Ache uma base de $\mathsf{V} = \mathbb{R}^n$ formada por autovetores do operador cuja matriz na base canônica é:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

3. Mostre que $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é um subespaço invariante para $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ se e só se W^{o} é invariante por T^t.

4. Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é diagonalizável se e só se $T^t \in \mathscr{L}(\mathsf{V}^*)$ é diagonalizável.

5. Mostre que toda matriz real simétrica 2×2 é diagonalizável.

6. Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ admite um subespaço invariante de dimensão k se e só se V admite uma base em relação à qual T tem matriz $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$, onde $A \in \mathrm{M}_{k\times k}(\mathbb{F})$, $C \in \mathrm{M}_{(n-k)\times(n-k)}(\mathbb{F})$ e $n = \dim \mathsf{V}$.

7. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ diagonalizável tal que $T^k = 0$ para algum inteiro $k > 0$. Mostre que $T = 0$.

8. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$. Mostre que as condições abaixo são equivalentes:

   ① T é diagonalizável.

   ② Para todo subespaço $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ invariante por T existe um subespaço $\mathsf{Z} \subset \mathsf{V}$ invariante por T tal que $\mathsf{W} \oplus \mathsf{Z} = \mathsf{V}$.

9. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ invariante por T. Prove que $q_{T_{\mathsf{W}}}$ e $p_{T_{\mathsf{W}}}$ dividem q_T e p_T, respectivamente.

10. Sejam $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2 \subset \mathsf{V}$ subespaços invariantes por $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ com $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2 = \{0\}$, q_1, q_2 os polinômios minimais de $T|_{\mathsf{W}_1}$ e $T|_{\mathsf{W}_2}$ e p_1, p_2 os polinômios característicos de $T|_{\mathsf{W}_1}$ e $T|_{\mathsf{W}_2}$.

    ① Mostre que $\mathsf{W} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$ é invariante por T e o polinômio minimal da restrição de T a W é o mínimo múltiplo comum entre q_1 e q_2.

    ② Mostre que o polinômio característico da restrição de T a W é o produto $p_1 p_2$.

11. Sejam $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tais que $ST = TS$.

    (a) Mostre que $\ker(T - \lambda)$ é invariante por S.

    (b) Use indução na dimensão do espaço para provar que S, T têm um autovetor em comum.

12. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, com $n = \dim \mathsf{V}$. Mostre que *pelo menos uma* das afirmações abaixo é verdadeira:

    ① T admite subespaços invariantes de dimensões 1 e $n-1$.

    ② T admite subespaços invariantes de dimensões 2 e $n-2$.

    Determine quando cada uma das situações acima ocorre.

13. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ diagonalizável e $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ invariante por T. Mostre que a restrição $T|_{\mathsf{W}} : \mathsf{W} \to \mathsf{W}$ é diagonalizável.

14. Verifique se o operador $T \in \mathscr{L}(\mathbb{F}^3)$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 2012 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

é diagonalizável para quaisquer $a, b \in \mathbb{F}$.

15. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ inversível. Mostre que $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é invariante por T se e só se é invariante por T^{-1}. Qual a relação entre os autovalores de T e T^{-1}?

16. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

    (a) Determine os autovalores e o posto de A.

    (b) Mostre que $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \operatorname{Im} A$.

    (c) Obtenha uma base de $\mathbb{R}^n$ em relação à qual A tenha matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Compare com o exercício (4) da página 31.

17. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$. Assim, podemos escrever $p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Sigma(T) \subset \mathbb{F}$ são distintos. Mostre que T é diagonalizável se e só se $\dim \ker(T - \lambda_j) = m_j$ para cada $j = 1, \ldots, k$.

2.3 Triangularização de operadores

Embora nem todo operador linear seja diagonalizável, existe uma propriedade mais fraca que é verificada em uma grande variedade de casos. Suponhamos que

$$\{0\} = \mathsf{W}_0 \subset \mathsf{W}_1 \subset \ldots \subset \mathsf{W}_n = \mathsf{V} \tag{2.3}$$

seja uma sequência de subespaços invariantes para T. Podemos obter uma base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de V tal que $u_j \in \mathsf{W}_j$ para $j = 1, \ldots, n$. A matriz de T em relação à $\mathscr{B}$ é a matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Comparando os polinômios característicos de T e da matriz acima, concluímos que os números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são exatamente os autovalores de T, contados de acordo com sua multiplicidade. Em particular, se T é triangularizável então $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$.

Definição 2.14 Um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ que admite uma sequência de subespaços como em (2.3) é dito *triangularizável.*

Proposição 2.15 [Forma triangular] Um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é triangularizável se e só se $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$.

Prova. Provemos o resultado por indução sobre a dimensão de V. Se $\dim \mathsf{V} = 1$, o resultado é óbvio.

Fixado $n > 1$, suponhamos o resultado válido para todo os operadores em espaços de dimensão menor que n. Decorre diretamente da definição do polinômio característico que $\lambda \in \Sigma(T)$ se e só se $\lambda \in \Sigma(T^t)$. Assim, fixemos $\lambda \in \Sigma(T)$ e tomemos $\varphi \in \mathsf{V}^*$ não-nulo tal que $T^t\varphi = \lambda\varphi$. Pondo $\mathsf{W} = \ker \varphi$, segue que W é invariante por T e $\dim \mathsf{W} = n-1$. Podemos aplicar a hipótese indutiva a $T|_{\mathsf{W}}$ e obter subespaços $\{0\} = \mathsf{W}_0 \subset \mathsf{W}_1 \subset \ldots \subset \mathsf{W}_{n-1} = \mathsf{W}$ invariantes por T. Basta definir $\mathsf{W}_n = \mathsf{V}$ e observar que $\{0\} = \mathsf{W}_0 \subset \mathsf{W}_1 \subset \ldots \subset \mathsf{W}_{n-1} \subset \mathsf{W}_n = \mathsf{V}$ são subespaços invariantes por T. ∎

Observação 2.16 Decorre da prova da proposição (2.15) que, dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$ e um inteiro positivo $j \leq n$, sempre existe pelo menos um subespaços invariantes por T de dimensão j.

Observação 2.17 Os elementos da diagonal de uma matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ triangular superior (ou inferior) são exatamente os autovalores de A, contados de acordo com sua multiplicidade algébrica. De fato, se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ então

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)\cdot \ldots \cdot (a_{nn}-\lambda)\,.$$

Os autovalores de A são exatamente as raízes deste último polinômio, a saber, $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. O corolário a seguir é consequência desta afirmação.

Corolário 2.18 Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ são os autovalores de T contados de acordo com sua multiplicidade então $\operatorname{tr} T = \sum_{j=1}^n \lambda_j$.

Corolário 2.19 (Cayley-Hamilton) Se $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$ então $p_T(T) = 0$.

Prova. Pela proposição (2.15) e pelos comentários que antecedem a definição (2.14), obtemos uma base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de V tal que $Tu_j = \lambda_j u_j + v_{j-1}$, onde v_{j-1} é combinação linear de $u_1, \ldots, u_{j-1}$, para $j > 1$ e $v_0 = 0$. Além disso, o polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)\cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_n)$. Logo, denotando por W_i o subespaço gerado por $\{u_1, \ldots, u_i\}$, $i > 0$, e $\mathsf{W}_0 = \{0\}$, temos que $(T-\lambda_i)(\mathsf{W}_i) \subset \mathsf{W}_{i-1}$, para $1 \leq i \leq n$. Disso,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} p_T(T) &= (T-\lambda_1)\cdot \ldots \cdot (T-\lambda_n)(\mathsf{W}_n) \\ &= (T-\lambda_1)\cdot \ldots \cdot (T-\lambda_{n-1})(\mathsf{W}_{n-1}) = \ldots \\ &= (T-\lambda_1)(\mathsf{W}_1) = \{0\}\,. \end{aligned}$$

∎

Dado um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, podemos nos perguntar sobre a relação entre os autovalores de T e os autovalores de T^2, ou, mais geralmente, sobre os autovalores de $p(T)$, onde $p \in \mathbb{F}[X]$ é um polinômio. A forma triangular dá uma resposta precisa à esta pergunta.

Proposição 2.20 Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$ e $p \in \mathbb{F}[X]$ um polinômio. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ são os autovalores de T, contados de acordo com sua multiplicidade algébrica, então $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n) \in \mathbb{F}$ são os autovalores de $p(T)$, contados de acordo com sua multiplicidade algébrica.

Prova. Como $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$, então pela forma triangular e pela observação (2.17), existe uma base de V em relação à qual a matriz de T é triangular superior, com $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ao longo da diagonal. Um cálculo simples usando potências de matrizes mostra que a matriz de $p(T)$ em relação à mesma base é triangular superior e tem $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$ ao longo da diagonal. Pela referida observação, estes últimos são exatamente os autovalores de $p(T)$. ∎

Corolário 2.21 Se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ são os autovalores de T, contados de acordo com sua multiplicidade algébrica, e $p \in \mathbb{F}[X]$ então $\operatorname{tr} p(T) = \sum_{j=1}^{n} p(\lambda_j)$.

Todos os resultados desta seção valem em geral, sem assumirmos que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$, conforme veremos na seção (2.7).

Exercícios

1. Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$, mostre que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} a_{ji},$$

onde (a_{ij}) é a matriz de T em relação a uma base qualquer de V. Encontre uma expressão semelhante para $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^3$.

2. Mostre que se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$, então $\operatorname{tr}(T^8 + 3T^6 + 5T^4 + 3T^2 + 2) \geq 2 \dim \mathsf{V}$.

3. Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\lambda \in \mathbb{F}$ um autovalor de T, mostre que a multiplicidade geométrica de λ é sempre menor ou igual que sua multiplicidade algébrica. Encontre exemplos em que ocorra a desigualdade estrita.

4. Um subconjunto $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é dito *simultaneamente triangularizável* se existem subespaços $\{0\} = \mathsf{W}_0 \subset \mathsf{W}_1 \subset \ldots \subset \mathsf{W}_n = \mathsf{V}$ invariantes por cada $S \in \mathscr{S}$.

   (a) Se $\mathscr{S}$ é simultaneamente triangularizável, mostre que $\Sigma(S) \subset \mathbb{F}$ e S é triangularizável, para todo $S \in \mathscr{S}$. Além disso, existe uma base $\mathscr{B}$ de V em relação à qual a matriz de S é triangular superior, para todo $S \in \mathscr{S}$.

   (b) Mostre que se $ST = TS$ e $\Sigma(S) \subset \mathbb{F}$ para todos $S, T \in \mathscr{S}$ então $\mathscr{S}$ é simultaneamente triangularizável. (Dica: Use o exercício (11) da página 24 para mostrar que existe um autovetor comum a todos os $S \in \mathscr{S}$.)

5. Seja $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ uma matriz tal que $\Sigma(A) \subset \mathbb{F}$. Por meio de operações elementares sobre as linhas de A (permutações e combinações lineares), podemos transformar A em uma matriz triangular superior $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Mostre que $\det A = (-1)^p b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn}$, onde p é o número de permutações de linhas realizadas.

6. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ uma ordenação qualquer dos autovalores de T, na qual cada autovalor aparece de acordo com sua multiplicidade algébrica. Mostre que existe uma base de V em relação à qual a matriz de T é triangular superior com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ao longo da diagonal *nesta ordem.* (Dica: Verifique detalhadamente a prova da proposição (2.15).)

2.4 O teorema da decomposição primária

Nesta seção, vamos enunciar e provar um resultado que generaliza as proposições (2.7) e (2.11) para o caso de um operador linear qualquer, não necessariamente diagonalizável. Vamos obter uma decomposição de V em subespaços invariantes bastante semelhante àquela obtida nas referidas proposições.

Teorema 2.22 (Decomposição Primária) Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{F}[X]$ polinômios mônicos tais que $q_T = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ e $\operatorname{mdc}(p_1, \ldots, p_k) = 1$. Então existe uma decomposição

$$\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$$

tal que:

① $\mathsf{W}_j = \ker p_j(T)$;

② Cada W_j é invariante por T;

③ O polinômio minimal de $T_j = T|_{\mathsf{W}_j} : \mathsf{W}_j \to \mathsf{W}_j$ é p_j, para cada $j = 1, \ldots, k$.

Prova. Seja $q_j = p_1 \cdot \ldots \cdot \hat{p}_j \cdot \ldots \cdot p_k$, $j = 1, \ldots, k$. Como $\operatorname{mdc}(q_1, \ldots, q_k) = 1$, existem $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{F}[X]$ tais que $f_1 q_1 + \ldots + f_k q_k = 1$. Definindo $g_j = f_j q_j$ e $P_j = g_j(T)$ para $j = 1, \ldots, k$, temos $P_1 + \ldots + P_k = I$, pois $g_1 + \ldots + g_k = 1$. Como q_T divide $g_i g_j$, temos que $P_i P_j = 0$ para $i \neq j$. Além disso, para qualquer $i = 1, \ldots, k$, temos $P_i = P_i(P_1 + \ldots + P_k) = P_i P_1 + \ldots + P_i P_k = P_i^2$.

Mostremos que $\ker p_j(T) = \operatorname{Im} P_j$, para $j = 1, \ldots, k$. Dado $u \in \operatorname{Im} P_j$, temos que

$$p_j(T)u = p_j(T) f_j(T) q_j(T) u = f_j(T) q_T(T) u = 0.$$

Logo, $\operatorname{Im} P_j \subset \ker p_j(T)$. Reciprocamente, dado $i \neq j$, como p_j divide $g_i = f_i q_i$, temos que $p_j(T)u = 0$ implica $P_i u = g_i(T)u = 0$. Assim, $u = P_1 u + \ldots + P_k u = P_j u \in \operatorname{Im} P_j$. Como T comuta com $p_j(T)$, concluímos que W_j é invariante por T.

Resta provar que o polinômio minimal de T_j é p_j. Evidentemente, $p_j(T_j) = 0$. Além disso, se $q(T_j) = 0$, então $(q q_j)(T) = q(T) q_j(T) = 0$. Isso mostra que q_T divide $q q_j$, e portanto, p_j divide q. Logo, p_j é o polinômio minimal de T_j. ∎

Corolário 2.23 Se o polinômio minimal de T é produto de fatores lineares (i.e., de grau 1) então T é diagonalizável.

Observação 2.24 O teorema da decomposição primária é normalmente enunciado considerando $q_T = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$ a fatoração de q_T como produto de irredutíveis. A forma enunciada aqui é mais adequada aos nossos propósitos.

Mantendo a notação do teorema anterior, admitamos que todos os autovalores de T pertencem a $\mathbb{F}$. Isto sempre ocorre se $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ (pelo teorema fundamental da álgebra) e no caso $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, isso significa que todos os autovalores de T são *reais*. Podemos obter uma decomposição de q_T como no teorema da decomposição primária com os polinômios $p_1,\dots,p_k$ da forma $p_j(X)=(X-\lambda_j)^{r_j}$, com $\lambda_j\in\Sigma(T)$ e r_j inteiro positivo. Seja $D=\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k$, onde $P_1,\dots,P_k$ são as projeções associadas à decomposição $\mathsf{V}=\mathsf{W}_1\oplus\ldots\oplus\mathsf{W}_k$. Pondo $N=T-D$, temos

$$\begin{aligned} N &= T(P_1+\ldots+P_k)-(\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k) \\ &= (T-\lambda_1)P_1+\ldots+(T-\lambda_k)P_k. \end{aligned}$$

O operador acima tem a propriedade que $N^m=0$ para qualquer $m\geq\max\{r_1,\dots,r_k\}$. Operadores deste tipo recebem uma denominação especial.

Definição 2.25 Um operador linear $N\in\mathscr{L}(\mathsf{V})$ é dito *nilpotente* se existe um inteiro positivo m tal que $N^m=0$. O menor inteiro positivo com esta propriedade é chamado de *índice de nilpotência* de N e denotado por $n(T)$. Uma definição inteiramente análoga vale para uma matriz $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ em lugar de um operador $T\in\mathscr{L}(\mathsf{V})$.

Oportunamente estudaremos mais a fundo a natureza dos operadores nilpotentes, mas, por hora, nos contentaremos em observar que o operador $N=T-D$ é nilpotente e *comuta* com D. Esta última afirmação decorre diretamente da definição de D.

A proposição a seguir é de grande importância teórica.

Proposição 2.26 Se $T\in\mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\Sigma(T)\subset\mathbb{F}$ então existem *únicos* operadores $D,N\in\mathscr{L}(\mathsf{V})$ tais que

① $T=D+N$;

② D é diagonalizável e N é nilpotente;

③ $DN=ND$.

Antes de provar esta proposição precisamos de um lema.

Lema 2.27 Sejam D,D' operadores diagonalizáveis que comutam. Então $D-D'$ é diagonalizável.

Prova. Como D,D' comutam, segue que $\mathsf{W}_\lambda=\ker(D'-\lambda)$ é um subespaço invariante para D. O polinômio minimal de $D_\lambda=D|_{\mathsf{W}_\lambda}$ divide q_D, e portanto, como este último é produto de fatores lineares, segue que q_{D_λ} é um produto de fatores lineares. Em particular, pelo corolário (2.23), concluímos que D_λ é diagonalizável. Logo, existe uma base de W_λ formada por autovetores de D_λ. Variando λ em $\Sigma(D')$ e reunindo todas as bases assim obtidas, podemos construir uma base de V formada por autovetores de D e D'. Em particular, $D-D'$ é diagonalizável. ∎

Na prova do lema acima, obtivemos uma base de V formada por autovetores de D e D'. Esta situação é bastante frequente e recebe uma denominação especial.

Definição 2.28 Dizemos que um subconjunto $\mathscr{S}\subset\mathscr{L}(\mathsf{V})$ é *simultaneamente diagonalizável* se existe uma base $\mathscr{B}$ de V tal que, para cada $S\in\mathscr{S}$, $\mathscr{B}$ é uma base de autovetores de S.

Evidentemente, se $\mathscr{S}\subset\mathscr{L}(\mathsf{V})$ é simultaneamente diagonalizável, então os elementos de S comutam entre si. O mesmo argumento usado na prova do lema (2.27) mostra que esta condição também é suficiente para que $\mathscr{S}=\{S,T\}$ seja simultaneamente diagonalizável, conforme a proposição abaixo.

Proposição 2.29 Um subconjunto $\{S, T\} \subset \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é *simultaneamente diagonalizável* se e só se S, T são diagonalizáveis e $ST = TS$.

Voltemos agora à prova da proposição (2.26).

Prova. Falta provar apenas a unicidade. Suponhamos que $T = D' + N'$ seja outra decomposição de T com as propriedades acima. Então $D - D' = N' - N$. Pela demonstração do teorema da decomposição primária, cada P_j e portanto, D é um polinômio em T. Isso implica que os operadores D, N, D', N' comutam entre si, e portanto, $D - D'$ é diagonalizável, pelo lema (2.27). Como N e N' comutam, temos

$$(N' - N)^r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} N'^j N^{r-j}.$$

Se $r \geq n(N) + n(N')$, concluímos que $(N - N')^r = 0$, portanto $N - N'$ é nilpotente. Em particular, o polinômio minimal de $N' - N = D - D'$ é da forma λ^l. Como $D - D'$ é diagonalizável, seu polinômio minimal não pode possuir raízes repetidas, logo, $l = 1$ e portanto, $N = N'$ e $D = D'$. ∎

Os operadores D e N construídos na última proposição podem ser pensados como a parte *diagonal* e a parte *nilpotente* de T. O operador N mede, em um certo sentido, quanto o operador T deixa de ser diagonalizável.

Exemplo 2.30 O teorema da decomposição primária aplicado ao operador T_5 do exemplo (2.5) mostra que $\mathbb{R}^3 = \ker(T_5 - I)^2 \oplus \ker(T_5 - 2I)$. O primeiro espaço tem dimensão 2 e o segundo tem dimensão 1. Evidentemente, $\ker(T_5 - I) \subset \ker(T_5 - I)^2$, e $\dim\ker(T_5 - I) = 1$. Sob este ponto de vista, o teorema da decomposição primária nos diz que podemos *aumentar* convenientemente os autoespaços $\ker(T - \lambda)$ correspondentes aos autovalores de um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ de forma que a soma direta destes espaços *aumentados* seja V.

Quando trabalhamos com a decomposição dada pelo teorema da decomposição primária, é fundamental conhecermos a dimensão de cada um dos espaços W_j. Para isso, suponhamos que $q_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ e $p_T(x) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{d_k}$, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$. Evidentemente, pelo teorema de Cayley-Hamilton, $r_j \leq d_j$ para cada $j = 1, \ldots, k$. O teorema da decomposição primária nos dá uma decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$ com $\mathsf{W}_j = \ker(T - \lambda_j)^{r_j}$, tal que o polinômio minimal de $T_j = T|_{\mathsf{W}_j}$ é $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$, para cada $j = 1, \ldots, k$. Como p_{T_j} e q_{T_j} têm as mesmas raízes, concluímos que $p_{T_j}(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{s_j}$, onde $s_j = \dim \mathsf{W}_j$, $j = 1, \ldots, k$. Pela invariância de cada W_j, vemos que o $p_T(\lambda) = p_{T_1}(\lambda) \cdot \ldots \cdot p_{T_k}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{s_k}$, donde segue que $\dim \mathsf{W}_j = s_j = d_j$.

Outra questão interessante é saber, nas hipóteses do parágrafo anterior, quando a cadeia de subespaços

$$\{0\} \subset \ker(T - \lambda_j) \subset \ker(T - \lambda_j)^2 \subset \ker(T - \lambda_j)^3 \subset \ldots \tag{2.4}$$

estaciona.[1] Para isso, seja $u \in \mathsf{V}$ tal que $(T - \lambda_j)^m u = 0$ para um certo inteiro positivo m. Escrevendo $u = u_1 + \ldots + u_k$, com $u_j \in \mathsf{W}_j$, temos que $0 = (T - \lambda_j)^m u = (T - \lambda_j)^m u_1 + \ldots + (T - \lambda_j)^m u_k$. Como cada parcela da última soma pertence ao espaço W_j correspondente, segue que $(T - \lambda_j)^m u_j = 0$ para cada $j = 1, \ldots, k$. Como o polinômio minimal de $T|_{\mathsf{W}_j}$ é $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$, temos que a restrição do operador $T - \lambda_j$ a W_i é inversível se $i \neq j$, e portanto, $u_i = 0$ para cada $i \neq j$. Em particular, $u = u_j \in \mathsf{W}_j$, ou seja, $(T - \lambda_j)^{r_j} u = 0$. Assim, a cadeia (2.4) estaciona exatamente na r_j-ésima posição. Estes argumentos provam a seguinte proposição.

[1]Como a V tem dimensão finita, a referida cadeia *sempre* estaciona, i.e., existe um inteiro positivo m tal que $\ker(T - \lambda_j)^m = \ker(T - \lambda_j)^{m+1} = \ldots$.

Proposição 2.31 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $q_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ e $p_T(x) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{d_k}$, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$. Então

① $\dim \ker(T - \lambda_j)^{r_j} = d_j$ e

② $\ker(T - \lambda_j)^{r_j} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \ker(T - \lambda_j)^l$.

O espaço $\mathsf{W}(\lambda_j) \doteq \bigcup_{l=1}^{\infty} \ker(T - \lambda_j)^l$ que aparece na proposição acima é chamado de *autoespaço generalizado associado ao autovalor* λ_j. O teorema da decomposição primária para um operador satisfazendo as hipóteses da referida proposição pode ser reenunciado da seguinte forma: *O espaço* V *é a soma direta dos autoespaços generalizados associados aos autovalores de* T. Vemos que a dimensão de $\mathsf{W}(\lambda_j) = \mathsf{W}_j$ é a multiplicidade algébrica do autovalor λ_j, para cada $j = 1, \ldots, k$.

Exercícios

1. Prove a proposição (2.29).

2. Mostre que se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é diagonalizável e $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é invariante por T então $T|_{\mathsf{W}}$ é diagonalizável.

3. Mostre que se $D, D' \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ são diagonalizáveis e comutam então $D + D'$ e DD' são diagonalizáveis.

4. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ de posto 1. Mostre que, ou T é diagonalizável ou T é nilpotente (não ambos).

5. Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$, os operadores D e N construídos na proposição (2.26) são chamados de *parte diagonalizável* e *parte nilpotente* de T, respectivamente. Mostre que se p é qualquer polinômio com coeficientes em $\mathbb{F}$, então a parte diagonalizável de $p(T)$ é $p(D)$.

6. Mostre que se D, N são, respectivamente, as partes diagonalizável e nilpotente de um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$, então D^t e N^t são, respectivamente, as partes diagonalizável e nilpotente de T^t.

7. Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$ a decomposição dada no teorema da decomposição primária.

   (a) Use o fato que as projeções associadas à decomposição primária são polinômios em T para mostrar que se $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é invariante por T, então

   $$\mathsf{W} = (\mathsf{W} \cap \mathsf{W}_1) \oplus \ldots \oplus (\mathsf{W} \cap \mathsf{W}_k).$$

   (b) Mostre que se T é diagonalizável e $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é invariante então existe um subespaço $\mathsf{W}' \subset \mathsf{V}$ invariante por T tal que $\mathsf{W} \oplus \mathsf{W}' = \mathsf{V}$. Reciprocamente, se $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$ e todo subespaço W invariante por T admite um complementar T-invariante então T é diagonalizável.[2]

8. Seja V um espaço vetorial *de dimensão qualquer sobre* $\mathbb{F}$ e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ um operador linear. Se existe $p \in \mathbb{F}[X]$ tal que $p(T) = 0$, mostre que os ítens (1) e (2) do teorema da decomposição primária são verdadeiros.

[2]Para a primeira afirmação, basta observar que se T é diagonalizável, então a restrição de T a cada W_j coincide com a multiplicação por um escalar $\lambda_j \in \Sigma(T)$. Assim, evidentemente, existe um subespaço $\mathsf{W}'_j \subset \mathsf{W}_j$ tal que $(\mathsf{W} \cap \mathsf{W}_j) \oplus \mathsf{W}'_j = \mathsf{W}_j$. O subespaço procurado é $\mathsf{W}'_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}'_k$. Para a segunda afirmação, use indução sobre a dimensão de V.

9. Este ítem pressupoe conhecimento elementar de cálculo. Vamos utilizar o teorema da decomposição primária para estudar as soluções de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes.

   (a) Seja Z o espaço das funções m vezes diferenciáveis $y = y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e D o operador de derivação agindo em Z. Dado um polinômio $p \in \mathbb{C}[X]$, considere o subespaço

   $$\mathsf{V} = \{y \in \mathsf{Z} : p(D)y = 0\}.$$

   Mostre que se $y \in \mathsf{V}$ então y se escreve de forma única como $y = y_1 + \ldots + y_k$ onde $y_j \in \ker(D-\lambda_j)^{r_j}$ e $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$ é a fatoração de p em termos de suas raízes distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$.

   (b) Mostre que $(D-\lambda)^r y(t) = e^{\lambda t} D^r(e^{-\lambda t} y)$ para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $r \geq 0$.

   (c) Conclua que V admite uma base da forma

   $$\mathscr{B} = \{t^l e^{\lambda_j t} : 0 \leq l \leq r_j\,,\ j = 1, \ldots, k\}.$$

   Em particular, V tem dimensão finita igual ao grau de p.

   (d) Depois de estudar a seção (2.7), estude o caso real.

2.5 Operadores nilpotentes

Nesta seção, vamos estudar alguns resultados importantes sobre operadores nilpotentes.

Definição 2.32 Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, um subespaço $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é dito *cíclico* se existe $u \in \mathsf{W}$ e um inteiro positivo m tal que $T^m u = 0$ e $\{u, Tu, \ldots, T^{m-1}u\}$ é base de W. Em particular, W é invariante por T e a matriz de $T|_{\mathsf{W}}$ em relação à base $\{u, Tu, \ldots, T^{m-1}u\}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Caso $\mathsf{W} = \mathsf{V}$, dizemos que u é um *vetor cíclico* para T. A matriz (2.5) será denotada por N_m.

A proposição a seguir é importante no estudo da estrutura de um operador nilpotente.

Proposição 2.33 Se $T^m u = 0$ mas $T^{m-1}u \neq 0$, então $\{u, Tu, \ldots, T^{m-1}u\}$ é linearmente independente.

Prova. Sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ escalares tais que $\alpha_0 u + \alpha_1 Tu + \ldots + \alpha_{m-1} T^{m-1}u = 0$. Aplicando T^{m-1} à última igualdade, concluímos que $\alpha_0 = 0$. Aplicando T^{m-2} à igualdade $\alpha_1 Tu + \ldots + \alpha_{m-1} T^{m-1}u = 0$, concluímos que $\alpha_2 = 0$. Repetindo o procedimento, temos que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$. ∎

Corolário 2.34 Se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é nilpotente então $n(T) \leq n$. Se $n(T) = n$ então existe uma base de V em relação à qual a matriz de T é N_n.

Evidentemente, se u é um vetor cíclico para T então $n(T) = n$. Isso limita bastante a existência de vetores cíclicos para operadores nilpotentes, mas ainda assim é possível estudar a fundo a estrutura de um operador nilpotente. O lema a seguir, cuja demonstração é evidente é o primeiro passo nessa direção.

Lema 2.35 Se $T : \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ é um operador linear e $\{u_1, \ldots, u_k\}$ e $\{Tv_1, \ldots, Tv_l\}$ são bases de $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$, respectivamente, então $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l\}$ é uma base de V.

Analisemos alguns casos simples. Se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é nilpotente e $n(T) = 2$, então $\operatorname{Im} T \subset \ker T$. Portanto, podemos estender uma base $\{Tv_1, \ldots, Tv_k\}$ de $\operatorname{Im} T$ a uma base $\{Tv_1, \ldots, Tv_k, u_1, \ldots, u_l\}$ de $\ker T$. Pelo lema (2.35), $\{v_1, Tv_1, \ldots, v_k, Tv_k, u_1, \ldots, u_l\}$ é uma base de V. A matriz de T em relação à esta última base é

$$\begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Ao longo da diagonal, esta última matriz tem k blocos da forma $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, após os quais aparecem l zeros. As demais entradas são todas nulas. Obtemos assim k subespaços cíclicos de dimensão 2 e l subespaços cíclicos de dimensão 1.

Suponhamos agora que $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é nilpotente de índice 3. Como $T|_{\operatorname{Im} T} : \operatorname{Im} T \to \operatorname{Im} T$ é nilpotente de índice 2, a argumentação anterior nos fornece uma base para $\operatorname{Im} T$ da forma

$$\{Tv_1, T^2v_1, \ldots, Tv_k, T^2v_k, Tu_1, \ldots, Tu_l\},$$

de forma que $Tu_1, \ldots, Tu_l \in \ker T$. Como $\{T^2v_1, \ldots, T^2v_k, Tu_1, \ldots, Tu_l\}$ é um subconjunto linearmente independente de $\ker T$, podemos completá-lo a uma base

$$\{T^2v_1, \ldots, T^2v_k, Tu_1, \ldots, Tu_l, w_1, \ldots, w_m\}$$

de $\ker T$. Pelo lema (2.35), o conjunto

$$\{v_1, Tv_1, T^2v_1, \ldots, v_k, Tv_k, T^2v_k, u_1, Tu_1, \ldots, u_l, Tu_l, w_1, \ldots, w_m\}$$

é uma base de V em relação à qual a matriz de T tem, ao longo da diagonal, k blocos do tipo N_3 seguidos por l blocos do tipo N_2 e por m blocos do tipo N_1 (zeros!). Estes blocos correspondem a k subespaços cíclicos de dimensão 3, l subespaços cíclicos de dimensão 2 e m subespaços cíclicos de dimensão 1.

Toda a discussão feita anteriormente pode ser estendida para operadores nilpotentes com qualquer índice de nilpotência:

Teorema 2.36 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ um operador nilpotente de índice $p > 0$. Então existem inteiros $p = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r > 0$ e subespaços cíclicos $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_r$ tais que $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_r$ e $\dim \mathsf{W}_i = k_i$, para $i = 1, \ldots, r$.

Mantendo a notação do teorema anterior, vemos que cada W_i admite uma base da forma

$$\{u, Tu, \ldots, T^{k_i - 1}\}.$$

Reunindo tais bases, obtemos uma base de V em relação à qual a matriz de T possui blocos dos tipos $N_p, N_{k_2} \dots, N_{k_r}$. Esta matriz é chamada de *forma canônica de Jordan para o operador T*. Na próxima seção, construiremos a forma de Jordan de um operador não necessariamente nilpotente. Definições e argumentações inteiramente análogas valem para *matrizes $n \times n$ sobre* $\mathbb{F}$ em lugar de operadores.

Exercícios

1. Verifique se as matrizes abaixo representam operadores nilpotentes e, em caso afirmativo, determine sua forma canônica de Jordan:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes a respeito de $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$:

   ① T é nilpotente.

   ② $\Sigma(T) = \{0\}$.

   ③ $q_T(x) = x^m$ para algum $m > 0$.

3. Determine todos os operadores *nilpotentes* em $\mathbb{F}^n$ que satisfazem as propriedades abaixo:

   ① $n = 5$ e $n(T) = 2$;

   ② $n = 5$, $n(T) = 2$ e $\dim \operatorname{Im} T = 1$;

   ③ $n = 7$ e $n(T) = 3$;

   ④ $n = 7$, $n(T) = 3$ e $\dim \operatorname{Im} T = 4$;

   ⑤ $n = 7$, $n(T) = 3$ e $\dim \ker T = 5$;

   ⑥ $n = 6$, $n(T) = 4$ e $\dim \operatorname{Im} T = 4$;

   ⑦ $n = 2011$ e $\dim \ker T = 1$.

4. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $T^m = 0$. Mostre que $T^n = 0$, onde $n = \dim \mathsf{V}$.

5. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   ① T é diagonalizável;

   ② Todos os autovalores de T tem multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica.

6. Sejam $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ nilpotentes tais que $ST = TS$. Prove que ST e $\alpha S + \beta T$ são nilpotentes, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

7. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$.

   (a) Use o exercício (16) para mostrar que existem subespaços invariantes W e Z para T tais que $T|_{\mathsf{W}}$ é nilpotente e $T|_{\mathsf{Z}}$ é inversível.

   (b) Mostre que a dimensão de W é a multiplicidade algébrica de zero como autovalor de T.

8. Se $N \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é nilpotente, mostre que $I+N$ é inversível e calcule $(I+N)^{-1}$. Faça o mesmo para $\lambda+N$, com $\lambda \neq 0$.

9. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Se $\operatorname{tr}(T^2+T^4+\ldots+T^{2012})=0$, mostre que T é nilpotente.

10. Seja $N \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ nilpotente de índice $m>0$ e $\mathsf{V}=\mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_r$ a decomposição em subespaços T-cíclicos de dimensões $m=k_1 \geq \ldots \geq k_r>0$ obtida no teorema (2.36). Mostre que $\dim\ker N = r$ e encontre uma fórmula para $\dim\ker N^p$.

11. Mostre que se $N \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é nilpotente e $p \in \mathbb{F}[X]$ então $p(N)$ é nilpotente.

12. Mostre que se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é nilpotente então $\operatorname{tr} T=0$. A recíproca é verdadeira?

13. Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é nilpotente se e só se $T^t \in \mathscr{L}(\mathsf{V}^*)$ é nilpotente, com mesmo índice de nilpotência.

14. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ nilpotente e definamos

$$e^T=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^j}{j!}.$$

A nilpotência de T implica que a soma que define e^T é finita, portanto, e^T é bem-definida.

① Mostre que $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ são nilpotentes e comutam, então $e^{S+T}=e^S e^T$. Conclua que e^T é inversível e $(e^T)^{-1}=e^{-T}$.

② Mostre que $\det e^T = e^{\operatorname{tr} T}$ para todo $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ nilpotente.

2.6 A forma canônica de Jordan

Nesta seção, vamos mostrar que um operador sempre admite uma base em relação à qual tem uma matriz *quase* diagonal, em certo sentido. Para facilitar a notação, dados um inteiro positivo m e $\lambda \in \mathbb{F}$, denotaremos por $J(\lambda; m)$ a matriz $m \times m$ a seguir:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Uma matriz do tipo $J(\lambda; m)$ é chamada de *bloco de Jordan* de dimensão m associado ao autovalor λ. Vemos que $J(\lambda; m)=\lambda I_m + N_m$, onde I_m denota a matriz identidade $m \times m$.

O resultado a seguir decorre do teorema (2.36).

Teorema 2.37 (Forma canônica de Jordan) Se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$ então V admite uma base em relação à qual a matriz de T possui blocos de Jordan ao longo da diagonal e os demais elementos são nulos. A soma das ordens dos blocos de Jordan correspondentes a um mesmo autovalor λ é igual à multiplicidade algébrica de λ

Prova. Como $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$, o polinômio minimal de T decompõe-se como

$$q_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são os autovalores distintos de T. Pelo teorema da decomposição primária, $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$ onde $\mathsf{W}_j = \ker(T - \lambda_j)^{m_j}$, para $j = 1, \ldots, k$. Para cada $j = 1, \ldots, k$, a restrição de $T - \lambda_j$ a W_j é nilpotente e portanto, pelo teorema (2.36), W_j admite uma base $\mathscr{B}_j$ em relação à qual a matriz da restrição de $T - \lambda_j$ a W_j possui blocos N_i ao longo da diagonal. Logo, a matriz da restrição de T a W_j tem ao longo da diagonal blocos de Jordan da forma $J(\lambda_j; i)$. Reunindo as bases assim obtidas, obtemos uma base de V em relação à qual a matriz de T é da forma desejada. ∎

Exercícios

1. Calcule a forma canônica de Jordan dos operadores T em $\mathbb{R}^3$ cujas matrizes em relação à base canônica são:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Calcule diretamente os polinômios característico e minimal de $J(\lambda; m)$.

3. Sejam A, B matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ e m um inteiro positivo tais que:

   ① $A^m = B^m$;

   ② $AB = BA$.

   Definimos $U_m \doteq \{z \in \mathbb{F} : z^m = 1\}$.

   (a) Se A e B são diagonalizáveis e $\lambda_A \in \mathbb{F}$ é autovalor de A, então existe um autovalor $\lambda_B \in \mathbb{F}$ de B tal que $\lambda_A^m = \lambda_B^m$. Em particular, existe $z \in U_m$ tal que $\lambda_A = z\lambda_B$.

   (b) Use a decomposição $T = D + N$ para estender o resultado do ítem anterior à situação em que A, B não são necessariamente diagonalizáveis.

(c) Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e m é ímpar, mostre que A e B têm a mesma parte diagonalizável (relativa à decomposição $D + N$).

(d) Ainda no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e m ímpar, use o exercício (4) da página (28) para mostrar que $A = B$ se $n = 2$ e A, B são inversíveis.

(e) Encontre contra-exemplos para a situação descrita no ítem anterior no caso $n > 2$.

4. No exercício (4) da página (27), vimos que uma coleção S de operadores que comutam dois a dois pode ser simultaneamente triangularizável, i.e., existe uma base $\mathscr{B}$ em relação à qual todo $S \in \mathscr{S}$ tem matriz triangular superior. Podemos nos perguntar se um resultado análogo é verdadeiro para a forma de Jordan, i.e., se $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ comutam, será que existe uma base $\mathscr{B}$ de V em relação à qual as matrizes de S e T têm blocos de Jordan ao longo da diagonal?[3]

2.7 Complexificações

Os resultados vistos anteriormente funcionam muito bem no caso em que o espaço ambiente V é complexo, pois nesta situação qualquer operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tem todos os seus autovalores em $\mathbb{C}$. No entanto, o mesmo não ocorre no caso real, já que, nestas circunstâncias, um operador pode não ter seus autovalores em $\mathbb{R}$, como mostra o exemplo simples $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vamos mostrar como estender os resultados vistos anteriormente para o caso de um espaço vetorial *real* V de dimensão finita.

Consideremos o conjunto $\mathsf{V} \times \mathsf{V}$ munido das operações de soma e multiplicação por um escalar *complexo* definidas por $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$ e $(\alpha + i\beta) \cdot (u, v) = (\alpha u - \beta v, \alpha v + \beta u)$ para quaisquer $u, u', v, v' \in \mathsf{V}$ e $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. O leitor pode verificar que o conjunto $\mathsf{V} \times \mathsf{V}$ munido destas operações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, o qual denotaremos por $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. O espaço $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ é chamado de *complexificação de* V ou *complexificado de* V.

A aplicação $\mathsf{V} \ni u \mapsto (u, 0) \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ é uma injeção *linear sobre escalares reais*, e portanto, podemos identificar cada vetor $u \in \mathsf{V}$ com seu correspondente $(u, 0) \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. Denotando o vetor $(0, v) = i \cdot (v, 0)$ por iv, podemos escrever $(u, v) = u + iv$ para cada $(u, v) \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. Doravante, usaremos esta notação.

Vemos que se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V (sobre $\mathbb{R}$), então $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ (sobre $\mathbb{C}$). Portanto, $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{V} = \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. As notações $\dim_{\mathbb{R}}$ e $\dim_{\mathbb{C}}$ são para frisar o conjunto de escalares considerado, embora isso seja desnecessário, uma vez que V é um espaço vetorial real e $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial complexo.

Se W é um espaço vetorial real e $T : \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ é um operador linear, então podemos definir $T^{\mathbb{C}} : \mathsf{V}^{\mathbb{C}} \to \mathsf{W}^{\mathbb{C}}$ pondo $T^{\mathbb{C}}(u + iv) = Tu + iTv$, para $u + iv \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. O leitor pode verificar que $T^{\mathbb{C}}$ é um operador linear sobre escalares complexos. $T^{\mathbb{C}}$ é a *complexificação de* T. Dadas bases $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V e W, respectivamente, e (a_{ij}) a matriz de T em relação a estas bases, vemos que a matriz de $T^{\mathbb{C}}$ em relação às mesmas bases (sobre $\mathbb{C}$) é a própria matriz (a_{ij}). Em particular, se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ então p_T e $p_{T^{\mathbb{C}}}$ têm o mesmo polinômio característico.

Proposição 2.38 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. Então

① $p_T = p_{T^{\mathbb{C}}}$; em particular, T e $T^{\mathbb{C}}$ têm os mesmos autovalores, inclusive com a mesma multiplicidade;

② A aplicação $\mathscr{L}(\mathsf{V}) \ni T \mapsto T^{\mathbb{C}} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}^{\mathbb{C}})$ é linear injetora e satisfaz $(ST)^{\mathbb{C}} = S^{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}$ para qualquer $S \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. Em particular, $p(T)^{\mathbb{C}} = p(T^{\mathbb{C}})$ para qualquer polinômio $p \in \mathbb{R}[X]$;

[3] Pode ser útil analizar as matrizes N_k e N_k^2, para $k \geq 3$.

③ $q_T = q_{T^{\mathbb{C}}}$;

④ **(Teorema de Cayley-Hamilton)** $p_T(T) = 0$.

Prova. A afirmação ① é consequência de $p_T = p_{T^{\mathbb{C}}}$. Para provar ②, observamos que $(T+\alpha S)^{\mathbb{C}} = T^{\mathbb{C}} + \alpha S^{\mathbb{C}}$ e $(ST)^{\mathbb{C}} = S^{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}$ para quaisquer $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, como $u + iv = 0$ se e só se $u = v = 0$, para quaisquer $u, v \in \mathsf{V}$, segue que $T^{\mathbb{C}} = 0$ se e só se $T = 0$. Assim, a referida aplicação é uma injeção linear.

Provemos ③. Como $q_T(T) = 0$ e q_T tem coeficientes reais, temos $0 = q_T(T)^{\mathbb{C}} = q_T(T^{\mathbb{C}})$, portanto, $q_{T^{\mathbb{C}}} | q_T$. Decompondo $q_{T^{\mathbb{C}}} = p_1 + ip_2$ com $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[X]$, temos que $0 = q_{T^{\mathbb{C}}}(T^{\mathbb{C}}) = p_1(T^{\mathbb{C}}) + ip_2(T^{\mathbb{C}}) = p_1(T)^{\mathbb{C}} + ip_2(T)^{\mathbb{C}}$. Aplicando o último operador em um vetor arbitrário da forma $u + i0$, com $u \in \mathsf{V}$, concluímos que $p_1(T) = p_2(T) = 0$. Portanto, $q_T | p_1$ e $q_T | p_2$, donde concluímos que $q_T | q_{T^{\mathbb{C}}}$ e, portanto, $q_T = q_{T^{\mathbb{C}}}$.

O teorema de Cayley-Hamilton nesta situação mais geral decorre do caso já provado. De fato, já sabemos que $p_{T^{\mathbb{C}}}(T^{\mathbb{C}}) = 0$, portanto, $0 = p_{T^{\mathbb{C}}}(T^{\mathbb{C}}) = p_T(T^{\mathbb{C}}) = p_T(T)^{\mathbb{C}}$, portanto, $p_T(T) = 0$. ∎

Podemos considerar também o espaço $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ como espaço vetorial *real*. Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V, então, como já comentamos, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base (complexa) de $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ então $\{u_1, iu_1 \ldots, u_n, iu_n\}$ é uma base *real* de $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. De fato, cada $z \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ se escreve como

$$z = (\alpha_1 + i\beta_1)u_1 + \ldots + (\alpha_n + i\beta_n)u_n = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta_1(iu_1) + \ldots + \beta_n(iu_n),$$

logo, o referido conjunto gera $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ com escalares reais. Além disso, se

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta_1(iu_1) + \ldots + \beta_n(iu_n) = 0$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, então $(\alpha_1 + i\beta_1)u_1 + \ldots + (\alpha_n + i\beta_n)u_n = 0$, donde $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$. Em particular, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathsf{V}^{\mathbb{C}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathsf{V}^{\mathbb{C}}) = 2\dim \mathsf{V}$. A matriz do operador $J : \mathsf{V}^{\mathbb{C}} \to \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ dado por $Jz = iz$, $z \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$, em relação à base $\{u_1, iu_1 \ldots, u_n, iu_n\}$ tem ordem $2n$ e blocos 2×2 da forma $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ao longo da diagonal

$$\begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & & \\ & \ddots & \\ & & \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}.$$

A estrutura de $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ como espaço vetorial complexo fica totalmente determinada pela aplicação J. Evidentemente, $J^2 = -I$.

Em geral, se $S : \mathsf{V}^{\mathbb{C}} \to \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ é um operador linear qualquer cuja matriz em relação à base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é (λ_{ij}), então a matriz do mesmo operador em relação à base $\{u_1, iu_1 \ldots, u_n, iu_n\}$ tem ordem $2n$ e blocos 2×2 da forma

$$\begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{11} & -\beta_{11} \\ \beta_{11} & \alpha_{11} \end{smallmatrix}\right) & \cdots & \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{1n} & -\beta_{1n} \\ \beta_{1n} & \alpha_{1n} \end{smallmatrix}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{n1} & -\beta_{n1} \\ \beta_{n1} & \alpha_{n1} \end{smallmatrix}\right) & \cdots & \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{nn} & -\beta_{nn} \\ \beta_{nn} & \alpha_{nn} \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_{ij} = \alpha_{ij} + i\beta_{ij}$, para $1 \leq i, j \leq n$. Este processo é chamado de *descomplexificação* do operador S (ou da matriz (λ_{ij})).

Dados $u, v \in \mathsf{V}$, definimos o *conjugado* de $z = u + iv \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ por $\overline{z} = u - iv$. Temos que $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ e $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\,\overline{z}$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{C}$ e $z, z' \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. Isto significa que a aplicação de *conjugação* $C : \mathsf{V}^{\mathbb{C}} \to \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ dada por $C(z) = \overline{z}$, $z \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$, é linear sobre escalares *reais*. Dado um subconjunto $X \subset \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$, escrevemos $\overline{X} = C(X)$. Para qualquer subespaço (complexo) $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$, temos que $\overline{\mathsf{W}}$ é um subespaço (complexo) de

$V^{\mathbb{C}}$. Como C é bijetora, $\overline{W}$ e W têm mesma dimensão (complexa ou real). Evidentemente, $C(C(z)) = z$, $z \in V^{\mathbb{C}}$. Se $T \in \mathscr{L}(V)$, então $T^{\mathbb{C}}(\overline{z}) = \overline{T^{\mathbb{C}}(z)}$, para qualquer $z \in V^{\mathbb{C}}$, ou seja, $T^{\mathbb{C}}C = CT^{\mathbb{C}}$.

Uma propriedade importante envolvendo a operação de conjugação é descrita no lema a seguir.

Lema 2.39 Se V é um espaço vetorial real, $T \in \mathscr{L}(V)$ e $\mu \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T então, para qualquer $j > 0$, temos $C(\ker(T^{\mathbb{C}} - \mu)^j) = \ker(T^{\mathbb{C}} - \overline{\mu})^j$. Em outras palavras, a operação de conjugação é uma bijeção entre $\ker(T^{\mathbb{C}} - \mu)^j$ e $\ker(T^{\mathbb{C}} - \overline{\mu})^j$.

Prova. Basta observar que, como $T^{\mathbb{C}} - \mu$ é linear sobre escalares complexos, então $T^{\mathbb{C}}C = CT^{\mathbb{C}}$. A igualdade desejada decorre do fato que

$$(T^{\mathbb{C}} - \overline{\mu})^j z = (T^{\mathbb{C}} - \overline{\mu})^j C(Cz) = C(T^{\mathbb{C}} - \mu)^j (Cz) = C(T^{\mathbb{C}} - \mu)^j (\overline{z}) .$$

∎

Podemos considerar agora a situação inversa. Seja V um espaço vetorial *real* de dimensão *par* e um operador $J \in \mathscr{L}(V)$ tal que $J^2 = -I$. Tal[4] operador induz uma operação de multiplicação por escalares complexos em W pondo $(\alpha + i\beta)u = \alpha u + \beta J u$, para $u \in W$ e $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Deixamos ao leitor o trabalho de verificar que, de fato, V munido desta operação é um espaço vetorial complexo, o qual será denotado por (V, J). O operador J é também chamado de *estrutura complexa*. A próxima proposição, cuja prova é deixada como exercício, é útil para reconhecermos quais operadores $T \in \mathscr{L}(V)$ são lineares sobre escalares complexos.

Proposição 2.40 Se $T \in \mathscr{L}(V)$ então $T \in \mathscr{L}(V, J)$ se e só se $TJ = JT$.

O lema a seguir é essencial para estendermos os resultados vistos anteriormente para o caso de um operador linear sobre um espaço vetorial real.

Lema 2.41 Seja V um espaço vetorial real e $T \in \mathscr{L}(V)$. Então existe uma decomposição $V = W \oplus Z$ satisfazendo as seguintes propriedades:

① W e Z são invariantes por T;

② $\Sigma(T|_W) \subset \mathbb{R}$, $\Sigma(T|_Z) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e $\Sigma(T|_W) \cup \Sigma(T|_Z) = \Sigma(T)$;

③ $\dim Z$ é par.

Escrevendo $q_T = p \cdot q$ onde p tem somente raízes reais e q tem somente raízes complexas, temos que $q_{T|_W} = p$ e $q_{T_Z} = q$.

Prova. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os autovalores reais de T e $\mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_m, \overline{\mu_m}$ os autovalores não-reais de T. Em particular,

$$q_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{q_k} (\lambda - \mu_1)^{r_1} (\lambda - \overline{\mu_1})^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \mu_m)^{r_l} (\lambda - \overline{\mu_m})^{r_l} = p_1(\lambda) p_2(\lambda) ,$$

onde $p_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{q_k}$ e $p_2(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{r_1} (\lambda - \overline{\mu_1})^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \mu_m)^{r_l} (\lambda - \overline{\mu_m})^{r_l}$. Como $\mathrm{mdc}(p_1, p_2) = 1$, pondo $W = \ker p_1(T)$ e $Z = \ker p_2(T)$, o teorema da decomposição primária implica que W, Z são invariantes por T e $V = W \oplus Z$. Além disso, $q_{T|_W} = p_1$ e $q_{T|_Z} = p_2$; em particular, ② é satisfeita. Para provar que $\dim Z$ é par, basta observar que, em um espaço vetorial real de dimensão *ímpar*, todo operador linear tem algum autovalor real e $T|_Z$ não tem autovalores reais. ∎

[4] Um tal operador J sempre existe: basta tomar uma base $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ de V e definir $Ju_j = v_j$ e $Jv_j = -u_j$, para cada $j = 1, \dots, n$.

Observação 2.42 Mantendo a notação do lema (2.41), o teorema da decomposição primária, as observações anteriores e o lema (2.39) implicam que V admite uma decomposição

$$\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \mathsf{W}_k \oplus \mathsf{Z}_1 \oplus \overline{\mathsf{Z}_1} \oplus \ldots \mathsf{Z}_l \oplus \overline{\mathsf{Z}_l}$$

onde $\mathsf{W}_j = \ker(T - \lambda_j)^{q_j}$, $j = 1, \ldots, k$ e $\mathsf{Z}_j = \ker(T - \mu_j)^{r_j}$, $j = 1, \ldots, m$. Temos que $\mathsf{W} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$ e $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}_1 \oplus \overline{\mathsf{Z}_1} \oplus \ldots \mathsf{Z}_l \oplus \overline{\mathsf{Z}_l}$. Em particular, se $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_l$ são bases de $\mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_l$, respectivamente, então $\mathscr{B}_1 \cup \overline{\mathscr{B}_1} \cup \ldots \cup \mathscr{B}_l \cup \overline{\mathscr{B}_l}$ é uma base de Z, onde $\overline{\mathscr{B}_j}$ denota a base de $\overline{\mathsf{Z}_j}$ formada pelos conjugados dos elementos de $\mathscr{B}_j$, para cada $j = 1, \ldots, l$.

Vamos concentrar nossa atenção no subespaço Z construído no lema (2.41). Denotemos por S a restrição de T a Z e consideremos o operador complexificado $S^{\mathbb{C}} : \mathsf{Z}^{\mathbb{C}} \to \mathsf{Z}^{\mathbb{C}}$. Pela proposição (2.15) e pela observação (2.42), $\mathsf{Z}^{\mathbb{C}}$ admite uma base $\{z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_m, \overline{z_m}\}$ em relação à qual $S^{\mathbb{C}}$ tem matriz triangular superior com os elementos $\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_m, \overline{\mu_m}$ ao longo da diagonal, de acordo sua multiplicidade.[5] O lema abaixo é imprescindível para continuarmos.

Lema 2.43 Pondo $z_j = u_j + i v_j$, $j = 1, \ldots, m$, temos que $\{u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m\}$ é uma base de Z em relação à qual a matriz de S é

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} \alpha_m & -\beta_m \\ \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

onde $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = 1, \ldots, m$, e todos os elementos abaixo dos blocos $\begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ são nulos. Cada bloco $\begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ aparece de acordo com a multiplicidade do autovalor μ_j correspondente.

Prova. Temos que $u_j = \frac{1}{2}(z_j + \overline{z_j})$ e $v_j = \frac{1}{2i}(z_j - \overline{z_j})$, $j = 1, \ldots, m$. Logo, para quaisquer $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_m, \beta_m \in \mathbb{R}$ temos que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j + \beta_j v_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\alpha_j - i\beta_j}{2} \right) z_j + \left(\frac{\alpha_j + i\beta_j}{2} \right) \overline{z_j};$$

em particular, uma combinação linear nula dos vetores $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$ com coeficientes reais produz uma combinação linear nula dos vetores $z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_m, \overline{z_m}$ com coeficientes complexos. Como os últimos são uma base (complexa) de $\mathsf{Z}^{\mathbb{C}}$, segue que $\{u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m\}$ é linearmente independente. ∎

Os seguintes resultados estão provados.

Proposição 2.44 Seja V um espaço vetorial real e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que q_T tem somente raízes *distintas*.

[5] Isto pode ser visto diretamente. De fato, seja $\{z_1, z_1', \ldots, z_m, z_m'\}$ uma base de Z em relação à qual $S^{\mathbb{C}}$ tem matriz triangular superior com os elementos $\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_m, \overline{\mu_m}$ ao longo da diagonal, de acordo sua multiplicidade. Então $S^{\mathbb{C}} z_j = \mu_j z_j + \sum_{l<j} \eta_{lj} z_j$ para $i = 1, \ldots, m$. Tomando o conjugado de ambos os membros, temos que $S^{\mathbb{C}}(\overline{z_j}) = \overline{\mu_j}\, \overline{z_j} + \sum_{l<j} \overline{\eta_{lj} z_j}$ para $i = 1, \ldots, m$, portanto, podemos trocar z_j' por $\overline{z_j}$, para cada $j = 1, \ldots, m$, e a diagonal da matriz de $S^{\mathbb{C}}$ em relação à base $\{z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_m, \overline{z_m}\}$ permanece inalterada.

Então existe uma base de V em relação à qual T tem matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_m & -\beta_m \\ \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ e $\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_m + i\beta_m \in \mathbb{C}$, $\beta_j \neq 0$, são exatamente os autovalores de T, repetidos de acordo com a sua multiplicidade algébrica.

Proposição 2.45 (Forma semi-triangular para operadores reais) Seja V um espaço vetorial real e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. Então existe uma base de V em relação à qual T tem matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_m & -\beta_m \\ \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Todos os elementos abaixo de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ e dos blocos $\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_m & -\beta_m \\ \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$ são nulos. Além disso, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_m, \overline{\mu_m}$ são exatamente os autovalores de T, onde $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Corolário 2.46 Se $\dim \mathsf{V}$ é par e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ então existe uma estrutura complexa $J \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $TJ = JT$. Em particular, $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, J)$.

Prova. Basta considerar $J : \mathsf{Z} \to \mathsf{Z}$ dado por $Ju_j = v_j$ e $Jv_j = -u_j$, $j = 1, \ldots, m$, onde $\{u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m\}$ é a base construída na proposição (2.43). ∎

Corolário 2.47 Sejam W um espaço vetorial qualquer sobre $\mathbb{F}$, $T \in \mathscr{L}(\mathsf{W})$ e $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{C}$ os autovalores de T repetidos de acordo com sua multiplicidade. Então

① $\operatorname{tr} T = \sum_{j=1}^{n} \eta_j$;

② $\det T = \eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_n$;

③ Dado um polinômio qualquer p com coeficientes em $\mathbb{F}$, os autovalores de $p(T)$ contados de acordo com sua multiplicidade, são $p(\eta_1), \ldots, p(\eta_n)$.

Corolário 2.48 Seja $A \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ a matriz descomplexificada de $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Então $\det A = |\det B|^2$. Em particular, $\det A \geq 0$.

O lema (2.41) e as proposições que o sucedem nos fornecem a forma canônica de Jordan *real* de um operador linear. Antes de enunciar tal resultado, fixemos uma notação. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \alpha + i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, o *bloco de Jordan aumentado* $J^{+}(\lambda; 2m)$ correspondente a λ é matriz $(2m) \times (2m)$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} & & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem blocos $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ao longo da diagonal seguidos por blocos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ na subdiagonal. Vemos que $J^{+}(\lambda, 2m)$ é a descomplexificação de $J(\lambda; m)$ definida anteriormente. Reunindo os resultados sobre a forma canônica de Jordan já obtidos com o lema (2.41) e as observações subesequentes, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.49 (Forma canônica de Jordan real) Se V é um espaço vetorial *real* e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, existe uma base de V em relação à qual a matriz de T tem, ao longo da diagonal, blocos de Jordan (correspondentes aos autovalores reais), blocos de Jordan aumentados (correspondentes aos autovalores complexos) e os demais elementos todos nulos. A soma das ordens dos blocos de Jordan correspondentes a um mesmo autovalor λ é igual à multiplicidade algébrica de λ, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e é igual ao dobro da multiplicidade algébrica de λ se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Exemplo 2.50 Considere o operador $T_7 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^7)$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $p_{T_7}(\lambda) = q_{T_7}(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda^2-2\lambda+2)^2 = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda-(1+i))^2(\lambda-(1-i))^2$. Pondo $\mathsf{W}_1 = \ker(T_7 + I)$, $\mathsf{W}_2 = \ker(T_7 - 2I)^2$ e $\mathsf{Z} = \ker(T_7^2 - 2T_7 + I)^2$, temos que $\mathbb{R}^7 = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2 \oplus \mathsf{Z}$. Temos que $\dim \mathsf{W}_1 = 1$, $\dim \mathsf{W}_2 = 2$ e $\dim \mathsf{Z} = 4$. Denotando por S a restrição $T_7|_{\mathsf{Z}}$, temos que $S^{\mathbb{C}}$ tem polinômios característico e minimal $(\lambda-(1+i))^2(\lambda-(1-i))^2$, portanto, sua forma canônica de Jordan é

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Isto significa que existe uma base $\{z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}\}$ tal que a matriz de $S^{\mathbb{C}}$ é (2.7). Pondo $z_j = u_j + i v_j$, $j = 1, 2$, o lema (2.43) implica que $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$ é uma base de Z em relação à qual S tem matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, concluímos que a forma canônica de Jordan real de T_7 é

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A forma canônica de Jordan de $T_7^{\mathbb{C}}$ é

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Observamos que se $\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, é um autovalor de T, a quantidade de vezes que o bloco $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ aparece ao longo da diagonal na forma canônica de Jordan real de T é exatamente a multiplicidade algébrica de μ. Nestas circunstâncias, a dimensão (real) do autoespaço generalizado associado ao autovalor μ é o dobro da multiplicidade algébrica de μ.

Exercícios

1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $\dim \mathsf{V} = 2$.

   (a) Considerando uma base $\{u_1, u_2\}$ qualquer, podemos definir em V uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, mantendo a mesma definição de soma de vetores e definindo o produto do número complexo $(a + ib)$ pelo vetor $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ como

   $$(a+ib)u = (a+ib)(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = (a\alpha_1 - b\alpha_2)u_1 + (a\alpha_2 + b\alpha_1)u_2\,.$$

   Mostre que, munido desta estrutura, V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, que será denotado por $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$.

   (b) Mostre que $\dim \mathsf{V}^{\mathbb{C}} = 1$.

   (c) Dado qualquer $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, mostre que o operador $T^{\mathbb{C}} : \mathsf{V}^{\mathbb{C}} \to \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ definido por $T^{\mathbb{C}} u = Tu$, $u \in \mathsf{V}^{\mathbb{C}}$, pertence a $\mathscr{L}(\mathsf{V}^{\mathbb{C}})$. Mostre que $\Sigma(T) = \Sigma(T^{\mathbb{C}})$.

   (d) Suponha que $\lambda = \alpha + i\beta \in \Sigma(T)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Mostre que existe uma base de V tal que a matriz de T com relação a mesma é

   $$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

2. Neste exercício, vamos encontrar diretamente uma forma canônica para operadores em um espaço vetorial *real* V de dimensão 2. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e λ_1, λ_2 os autovalores de T.

(a) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ e $T \neq \lambda I$ então $(T-\lambda)^2 = 0$.

(b) Mostre que existe uma base de V em relação à qual a matriz de T é de um (e somente um) dos tipos abaixo:

① $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são reais;

② $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ e $T = \lambda I$;

③ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e $T \neq \lambda I$;

④ $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$;

(c) Descreva o processo do ítem anterior para o operador T em $\mathsf{V} = \mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base canônica é $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Calcule a forma canônica de Jordan (real) dos operadores cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$ é:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Sejam $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $J \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $J^2 + I = 0$.

① Mostre que $\dim \mathsf{V}$ é par, digamos $\dim \mathsf{V} = 2m$.

② Considere o operador $J^{\mathbb{C}} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}^{\mathbb{C}})$ e $\mathsf{V}_{\pm} = \ker(J^{\mathbb{C}} \pm i)$. Mostre que $\dim \mathsf{V}_+ = \dim \mathsf{V}_- = m$ e $\mathsf{V}^{\mathbb{C}} = \mathsf{V}_+ \oplus \mathsf{V}_-$.

③ Mostre que existe uma base de V em relação à qual J tem matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I_{m\times m} \\ I_{m\times m} & 0 \end{smallmatrix}\right)$

5. Sejam $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $q_T(x) = x^2 + ax + b$, com $a^2 - 4b < 0$.

① Mostre que $\dim \mathsf{V}$ é par, digamos $\dim \mathsf{V} = 2m$.

② Mostre que existe uma base de V em relação à qual T tem matriz $\left(\begin{smallmatrix} \alpha I_{m\times m} & -\beta I_{m\times m} \\ \beta I_{m\times m} & \alpha I_{m\times m} \end{smallmatrix}\right)$, onde $\alpha = -a/2$ e $\beta = \sqrt{b - a^2/4}$. Observe que as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$ são $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$. Compare com o exercício (1).

6. Seja m um inteiro positivo e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $T^m = I$. Prove as seguintes afirmações:

① Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ então T é diagonalizável.

② Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ então existe uma base de V em relação à qual a matriz de T tem, ao longo da diagonal, blocos dos seguintes tipos:

i. $I_{k\times k}$, $k = 0,1,\dots,n = \dim \mathsf{V}$;

ii. $-I_{l\times l}$ $l = 0,1,\dots,n$;

iii. $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{smallmatrix}\right)$, onde $e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_m}$ são as raízes m-ésimas da unidade.

7. Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $T^2 - 2T + \alpha I = 0$. Prove as seguintes afirmações:

① Se $\alpha < 1$ então T é diagonalizável e tem autovalores $\lambda_+ = 1 + \sqrt{1-\alpha}$ e $\lambda_- = 1 - \sqrt{1-\alpha}$.

② Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e $\alpha > 1$ então T é diagonalizável e tem autovalores $\lambda_+ = 1 + i\sqrt{\alpha-1}$ e $\lambda_- = 1 - i\sqrt{\alpha-1}$.

③ Se $\alpha = 1$ então existe uma base de V em relação à qual a matriz de T tem, ao longo da diagonal, um bloco $I_{k\times k}$ e l blocos 2×2 da forma $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, com $k + 2l = \dim \mathsf{V}$.

④ Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $\alpha > 1$ então $\dim \mathsf{V}$ é par e existe uma base de V em relação à qual a matriz de T tem l blocos 2×2 da forma $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \sqrt{\alpha-1} \\ -\sqrt{\alpha-1} & 1 \end{smallmatrix}\right)$, com $2l = \dim \mathsf{V}$.

8. Sejam $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, $\dim \mathsf{V} = n$ e $p \in \mathbb{R}[X]$ tais que $p(T) = 0$. Calcule as possíveis formas canônicas de Jordan de T nos seguintes casos:

① $p(x) = x^2 - 4x + 5$, $n = 4$;

② $p(x) = x^3 - 1$, $n = 7$;

③ $p(x) = x^4 - 1$, $n = 8$;

④ $p(x) = x^4 - x^2 - 2x + 2$, $n = 9$

9. Mostre que a proposição (2.20) e o corolário (2.18) continuam válidos no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, mesmo sem termos $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

2.8 Operadores semi-simples

Na proposição (2.26), vimos que um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$ pode ser escrito, de maneira única, como $T = D + N$, onde D é diagonalizável, N é nilpotente e $DN = ND$. A condição $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$ é imprescindível, pois, pela própria construção de D e N, vemos que os autovalores de D são os mesmos autovalores de T, inclusive com a mesma multiplicidade. Podemos nos perguntar que tipo de resultado é válido no caso em que T não necessariamente tenha todos os seus autovalores em $\mathbb{F}$.

Sejam V um espaço vetorial real e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. Pelo lema (2.41), obtemos uma decomposição em subespaços T-invariantes $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{Z}$ tais que $T|_{\mathsf{W}}$ tem somente autovalores reais e T_{Z} tem somente autovalores não-reais. Definindo $R = T|_{\mathsf{Z}} \in \mathscr{L}(\mathsf{Z})$, segue da proposição (2.26) que os operadores $T|_{\mathsf{W}}$ e $R^{\mathbb{C}}$ podem ser escritos como $T|_{\mathsf{W}} = D_1 + N_1$ e $R^{\mathbb{C}} = D_2 + N_2$, onde $D_1 \in \mathscr{L}(\mathsf{W})$ e $D_2 \in \mathscr{L}(\mathsf{Z}^{\mathbb{C}})$ são diagonalizáveis, $N_1 \in \mathscr{L}(\mathsf{W})$ e $N_2 \in \mathscr{L}(\mathsf{Z}^{\mathbb{C}})$ são nilpotentes e $D_j N_j = N_j D_j$, para $j = 1,2$. O mesmo processo de descomplexificação utilizado no lema (2.43) fornece-nos uma base em relação à qual a matriz de D_2 tem, ao longo da diagonal, blocos 2×2 da forma $\left(\begin{smallmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{smallmatrix}\right)$, onde $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ é autovalor de T, repetidos de acordo com sua multiplicidade algébrica.

Se $P_{\mathsf{W}}, P_{\mathsf{Z}}$ são as projeções associadas à decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{Z}$, podemos definir $S = D_1 P_{\mathsf{W}} + D_2 P_{\mathsf{Z}}$ e $N = N_1 P_{\mathsf{W}} + N_2 P_{\mathsf{Z}}$. Temos, evidentemente, que $T = S + N$ e $SN = NS$. O operador S, embora não seja diagonalizável, admite uma base em relação à qual sua matriz tem ao longo da diagonal os autovalores reais de T e blocos 2×2 da forma $\begin{pmatrix}\alpha_j & -\beta_j\\ \beta_j & \alpha_j\end{pmatrix}$, onde $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ é autovalor de T, repetidos de acordo com sua multiplicidade algébrica. Em particular, ou S é diagonalizável (no caso em que T não tem autovalores não-reais) ou a complexificação $S^{\mathbb{C}}$ é diagonalizável. Operadores com esta propriedade recebem um nome especial.

Definição 2.51 Um operador $S \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é dito *semi-simples* se S ou $\mathrm{S}^{\mathbb{C}}$ for diagonalizável.

A proposição abaixo decorre diretamente das construções vistas na seção (2.7).

Proposição 2.52 Um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é semi-simples se e só se admite uma base em relação à qual sua matriz tem

A proposição e o corolário abaixo decorrem da argumentação anterior.

Proposição 2.53 Todo $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ se escreve de maneira única como $T = S + N$ onde S é semi-simples, N é nilpotente e $SN = NS$.

Proposição 2.54 Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, então um operador é semi-simples se e só se é diagonalizável.

No próximo teorema, daremos uma caracterização bastante interessante dos operadores semi-simples. Antes disso, uma palavra sobre polinômios irredutíveis. Um polinômio $p \in \mathbb{F}[X]$ é dito *irredutível* (sobre $\mathbb{F}$) se não puder ser escrito como produto de polinômios de grau positivo. É claro que $a \in \mathbb{F}$ é raiz de p se e só se $\lambda - a$ divide $p(\lambda)$. Em particular, os polinômios irredutíveis sobre $\mathbb{C}$ tem grau 1. Já os polinômios irredutíveis sobre $\mathbb{R}$ são de uma das duas formas:

1. $\lambda - a$, com $a \in \mathbb{R}$;
2. $\lambda^2 + a\lambda + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a^2 - 4b < 0$.

Teorema 2.55 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. São equivalentes as afirmações abaixo:

(a) T é semi-simples;

(b) Para qualquer subespaço T-invariante $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$, existe um subespaço T-invariante $\mathsf{W}' \subset \mathsf{V}$ tal que $\mathsf{W} \oplus \mathsf{W}' = \mathsf{V}$.

(c) O polinômio minimal q_T se decompõe como produto $q_T = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ de fatores irredutíveis distintos.

Prova. Provemos que (a) implica (c). Se T é diagonalizável, então q_T se escreve como no enunciado com os $p_j's$ do primeiro tipo. Se $T^{\mathbb{C}}$ é diagonalizável então q_T é produto de fatores da forma $\lambda - \mu_j$, com $\mu_j \in \mathbb{C}$. A cada um dos fatores $\lambda - \mu_j$, com μ_j não-real, corresponde um fator do tipo $\lambda - \overline{\mu_j}$. Podemos agrupar estes dois termos, obtendo $(\lambda - \mu_j)(\lambda - \overline{\mu_j}) = \lambda^2 - 2\mathrm{Re}\,\mu_j + |\mu_j|^2$. Este último polinômio é irredutível sobre $\mathbb{R}$. Reciprocamente, se q_T tem a propriedade expressa no ítem (c), então se decompõe como produto de fatores lineares em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e portanto, T ou $T^{\mathbb{C}}$ é diagonalizável. Logo, (a) e (c) são equivalentes.

A implicação (c) $\Rightarrow$ (b) decorre do exercício (7) da página 31.

Vamos provar que (b) implica (a). Suponhamos inicialmente que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$. O resultado será provado por indução sobre a dimensão de V. O resultado é trivialmente válido se $\dim \mathsf{V} = 1$. Vamos assumir que a afirmação é verdadeira para espaços de dimensão $< n$, onde $n \geq 1$ é fixado. Dado $\lambda_0 \in \Sigma(T)$, o subespaço $\ker(T - \lambda_0)$ é T-invariante, logo, existe um subespaço T-invariante $\mathsf{W}' \subset \mathsf{V}$ tal que $\mathsf{W}' \oplus \ker(T - \lambda_0) = \mathsf{V}$. Aplicando a hipótese indutiva à $T|_{\mathsf{W}'}$, concluímos que este último é diagonalizável, e, portanto, T é diagonalizável. O caso complexo pode ser tratado de maneira inteiramente análoga, aplicando o lema (2.41) e complexificando.

∎

Exercícios

1. Preencha os detalhes da prova da proposição (2.53)
2. Mostre que se $S \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é semi-simples e $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é T-invariante então $T|_{\mathsf{W}}$ é semi-simples.
3. Complete os detalhes das implicação (c) ⇒ (b) e (b) ⇒ (a) do teorema (2.55).
4. Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $p \in \mathbb{F}[X]$ tais que $p(T) = 0$. Mostre que se p tem somente raízes simples então T é semi-simples.
5. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $T = S + N$ a decomposição de T como soma de um operador semi-simples e um operador nilpotente. Dado $p \in \mathbb{F}[X]$, prove que a *parte semi-simples* de $p(T)$ é $p(S)$.
6. Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ semi-simples e $p \in \mathbb{F}[X]$:
   (a) Mostre que $p(T)$ é semi-simples.
   (b) Mostre que se $p(T)$ é nilpotente então $p(T) = 0$.

2.9 Divisores elementares e o problema da semelhança

Dizemos que duas matrizes $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ são *semelhantes* se representam um mesmo operador linear em relação à bases distintas. Isto é o mesmo que dizer que existe $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ inversível tal que $B = U^{-1}AU$. Assim, podemos pensar, do ponto de vista da álgebra linear, que matrizes semelhantes são, de fato, a *mesma coisa*. É muito simples verificar que a relação de semelhança de matrizes é de equivalência e, portanto, a mesma determina uma partição de $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ em classes de equivalência. Vamos nesta seção mostrar como a forma de Jordan pode nos ajudar a determinar as classes de equivalência desta relação. O resultado mais importantes desta seção nos diz que $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ são semelhantes se e só se suas formas de Jordan têm os mesmos blocos de Jordan ao longo da diagonal. Em particular, as classes de equivalência da relação de semelhança ficam inteiramente determinadas pelas formas de Jordan não-semelhantes.

Uma relação inteiramente análoga pode ser definida para operadores lineares em um espaço vetorial V de dimensão finita n. Dizemos que $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ são *conjugados* se existe $U \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ inversível tal que $T = U^{-1}SU$. Evidentemente, esta também é uma relação de equivalência em $\mathscr{L}(\mathsf{V})$ e podemos nos perguntar sobre suas classes de equivalência. É claro que, fixando uma base em V, este problema é totalmente equivalente ao problema descrito no parágrafo anterior.

A primeira informação que temos sobre matrizes semelhantes é descrita no lema a seguir.

Lema 2.56 Se $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ são semelhantes, então $p_A = p_B$ e $q_A = q_B$. Em particular, A, B têm os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade.

Embora o lema acima seja muito importante, na prática serve somente para dar respostas negativas. No próximo exemplo, veremos uma situação em que duas matrizes não-semelhantes têm os mesmos polinômios minimal e caracterísitico.

Exemplo 2.57 Considere as matrizes $A = \left(\begin{smallmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_4(\mathbb{F})$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_4(\mathbb{F})$. Vemos que $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = \lambda^4$, $q_A(\lambda) = q_B(\lambda) = \lambda^2$, mas A, B não são semelhantes, pois A tem posto 2 e B tem posto 1.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre $\mathbb{F}$ e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ nilpotente de índice p. Obtivemos no teorema (2.36) uma decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_r$ onde cada W_j é um subespaço cíclico para T de dimensão k_j, $p = k_1 \geq \ldots \geq k_r > 0$ e $k_1 + \ldots + k_r = n$. Os números $k_1, \ldots, k_r$ são chamados de *invariantes* de T. Vamos verificar que, de fato, tais números determinam T.

Lema 2.58 Se W é um subespaço cíclico de dimensão $m > 0$ para um operador nilpotente $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ então $\dim T^k(\mathsf{W}) = m - k$ se $0 \leq k \leq m$.

Prova. De fato, se $\{u, Tu, \ldots, T^{m-1}u\}$ é uma base para W, então $\{T^k u, T^{k+1}u, T^{m-1}u\}$ é uma base de $T^k(\mathsf{W})$. ∎

Proposição 2.59 Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ nilpotente de índice p e $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_r$, $k_1, \ldots, k_r$ como antes. Admitamos que $\mathsf{V} = \mathsf{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{V}_l$ onde $\mathsf{V}_1, \ldots, \mathsf{V}_l$ são subespaços cíclicos para T de dimensões $p = q_1 \geq \ldots \geq q_l > 0$, respectivamente, com $q_1 + \ldots + q_l = n$. Então $l = r$ e $k_i = q_i$ para $i = 1, \ldots, r$.

Prova. Raciocinemos por contradição. Se o resultado for falso, podemos tomar i o menor inteiro positivo tal que $k_i \neq q_i$. Não há perda de generalidade em supormos que $k_i < q_i$. Como $\mathsf{V}_1, \ldots, \mathsf{V}_r$ são invariantes por T e $T^{k_i}\mathsf{W}_l = \{0\}$ se $l \geq i$, temos que

$$T^{k_i}\mathsf{V} = T^{k_i}\mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus T^{k_i}\mathsf{W}_{i-1}.$$

Em particular, pelo lema (2.58), $\dim T^{k_i}\mathsf{V} = (k_1 - k_i) + \ldots + (k_{i-1} - k_i)$. Como $k_1 = q_1, \ldots, k_{i-1} = q_{i-1}$, segue que $\dim T^{k_i}\mathsf{V} = (q_1 - k_i) + \ldots + (q_{i-1} - k_i)$. Por outro lado, temos também que

$$T^{k_i}\mathsf{V} = T^{k_i}\mathsf{V}_1 \oplus \ldots \oplus T^{k_i}\mathsf{V}_i \oplus \ldots \oplus T^{k_i}\mathsf{V}_r.$$

Pelo referido lema, $\dim T^{k_i}\mathsf{V} \geq (q_1 - k_i) + \ldots + (q_i - k_i)$. Comparando as duas expressões para $\dim T^{k_i}\mathsf{V}$, concluímos que $k_i \geq q_i$, uma contradição. ∎

Caso T seja nilpotente com invariantes $k_1 \geq \ldots \geq k_r$, qualquer operador conjugado a T deve possuir os mesmos invariantes. De fato, se $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_r$ com cada W_i cíclico em relação a T, então dado qualquer $U \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ inversível, temos que $\mathsf{V} = U(\mathsf{W}_1) \oplus \ldots \oplus U(\mathsf{W}_r)$ e cada $U(\mathsf{W}_i)$ é cíclico em relação a $S = UTU^{-1}$. Em particular, os invariantes de S coincidem com os de T. A recíproca também é válida: se S, T nilpotentes possuem os mesmos invariantes $k_1 \geq \ldots \geq k_r > 0$ então obtemos subespaços cíclicos $\mathsf{V}_1, \ldots, \mathsf{V}_r$ e $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_r$ para S, T, respectivamente, tais que $\dim \mathsf{V}_i = \dim \mathsf{W}_i = k_i$ e $\mathsf{V} = \mathsf{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{V}_r = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_r$. Para $1 \leq i \leq r$, como W_i é cíclico em relação a T e V_i é cíclico em relação a S, obtemos bases de W_i e V_i da forma $\{w_i, Tw_i, \ldots, T^{k_i - 1}w_i\}$, $\{v_i, Sv_i, \ldots, S^{k_i - 1}v_i\}$, respectivamente. Definindo $U_i : \mathsf{W}_i \to \mathsf{V}_i$ como $U(T^l w_i) = S^l v_i$, $l = 0, 1, \ldots, k_i - 1$, temos que U_i é um isomorfismo entre W_i e V_i. Além disso, $UTw_i = Sv_i = SUw_i$. Denotando por $U \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ o operador que coincide com U_i em cada W_i, temos que $UT = SU$, logo, $S = UTU^{-1}$. Estas considerações provam o resultado abaixo.

Proposição 2.60 Se $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ são nilpotentes, então S, T são conjugados se e só se possuem os mesmos invariantes.

Vamos agora ver o que pode ser feito no caso não-nilpotente. Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$, podemos escrever $q_T(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_k)^{q_k}$ e $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ são os autovalores distintos de T e $\mathsf{W}_j = \ker(T-\lambda_j)^{q_j}$, $j = 1, \ldots, k$. Para cada $i = 1, \ldots, r$, a restrição de $T - \lambda_i$ a W_i é nilpotente de índice q_i; a proposição (2.60) mostra que um tal operador é determinado unicamente por seus invariantes $l_1^{(i)} \geq \ldots \geq l_{r_i}^{(i)} > 0$. Logo, a forma canônica de T é determinada exclusivamente pelos seus autovalores e pelos inteiros

$$l_1^{(1)}, \ldots, l_{r_i}^{(1)}, \ldots, l_1^{(k)}, \ldots, l_{r_k}^{(k)}.$$

A fim de escrever de maneira compacta todas estas informações, chamamos os polinômios

$$(\lambda-\lambda_1)^{l_1^{(1)}}, \ldots, (\lambda-\lambda_1)^{l_{r_1}^{(1)}}, \ldots, (\lambda-\lambda_k)^{l_1^{(k)}}, \ldots, (\lambda-\lambda_k)^{l_{r_k}^{(k)}}$$

de *divisores elementares de* T.

No caso em que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e T possui autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ e $\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_m, \overline{\mu_m} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, podemos escrever

$$q_T(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_k)^{q_k} (\lambda-\mu_1)^{r_1} (\lambda-\overline{\mu_1})^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\mu_m)^{r_l} (\lambda-\overline{\mu_m})^{r_l} = p_1(\lambda) p_2(\lambda),$$

onde $p_1(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_k)^{q_k}$ e $p_2(\lambda) = (\lambda-\mu_1)^{r_1}(\lambda-\overline{\mu_1})^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\mu_m)^{r_l}(\lambda-\overline{\mu_m})^{r_l}$. Esta decomposição nos dá uma decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{Z}$ em subespaços invariantes $\mathsf{W} = \ker p_1(T)$ e $\mathsf{Z} = \ker p_2(T)$ tal que $q_{T|_\mathsf{W}} = p_1$ e $q_{T_\mathsf{Z}} = p_2$. Aplicando a mesma argumentação anterior à restrição $T|_\mathsf{Z}$, concluímos que $T|_\mathsf{Z}$ fica determinado pelos seus divisores elementares

$$(\lambda-\mu_1)^{n_1^{(1)}} \cdot (\lambda-\overline{\mu_1})^{n_{s_1}^{(1)}}, \ldots, (\lambda-\mu_m)^{n_1^{(1)}} \cdot (\lambda-\overline{\mu_m})^{n_{s_m}^{(1)}}$$

Estes polinômios têm coeficientes reais, pois $(\lambda-\mu_i)^d \cdot (\lambda-\overline{\mu_i})^d = (\lambda^2 + 2(\mathrm{Re}\mu_i)\lambda + |\mu_i|^2)^d$, para qualquer $i = 1, \ldots, m$. Neste caso, os divisores elementares de T são os divisores elementares de $T|_\mathsf{W}$ e os de $T|_\mathsf{Z}$. Provamos o teorema a seguir.

Teorema 2.61 As classes de equivalência da relação $\sim$ são totalmente determinadas pelas formas canônicas de Jordan distintas, no sentido que dois elementos pertencem à mesma classe de equivalência se e só se possuem os mesmos divisores elementares.

O corolário abaixo também decorre da argumentação utilizada na demonstração do teorema (2.61).

Corolário 2.62 O produto dos divisores elementares de T é p_T.

Exemplo 2.63 Os divisores elementares do operador T_5 do exemplo (2.50) são $(\lambda+1), (\lambda+2)^2$ e $\{(\lambda-(1+i))(\lambda-(1-i)\}^2 = (\lambda^2-2\lambda+2)^2$.

O corolário abaixo é consequência do teorema (2.61) e da proposição (2.38).

Corolário 2.64 Se $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ são semelhantes sobre $\mathbb{C}$ então A, B são semelhantes sobre $\mathbb{R}$ (i.e., existe $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ inversível tal que $B = VAV^{-1}$).

Exercícios

1. Prove o lema (2.56).

2. Calcule os divisores elementares dos operadores descritos no exercício (3) da página 44.

3. Encontre exemplos de operadores $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ não-conjugados tais que $p_S = p_T$ e $q_S = q_T$.

4. Mostre que se $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ satisfazem:

   ① $p_S = p_T$,

   ② $q_S = q_T$,

   ③ p_S não tem raízes de multiplicidade estritamente maior que 3,

   então S e T são conjugados.

5. Sejam A, B matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tais que:

   ① $p_A = p_B = p$ e $q_A = q_B = q$;

   ② p não tem raiz de multiplicidade > 4;

   ③ q não tem raiz de multiplicidade 2.

   Mostre que A e B são semelhantes sobre $\mathbb{F}$.

6. Calcule todas as possibilidades de invariantes para operadores nilpotentes em espaços vetoriais de dimensão baixa (digamos que $\dim \mathsf{V} \leq 8$). Calcule a quantidade de classes distintas de operadores nilpotentes em uma dada dimensão.

7. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ o operador cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   ① Determine a forma canônica de Jordan de T.

   ② Determine os divisores elementares de T. Decida se T é conjugado ao operador S cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   ③ Determine a forma canônica de Jordan do operador $T^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$.

8. Verifique se as matrizes A, B abaixo são semelhantes sobre $\mathbb{F}$:

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

② $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

③ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

④ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

⑤ $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

9. Sejam S, T operadores nilpotentes em $\mathbb{V}$, com $\dim \mathbb{V} \leq 3$. Mostre que S e T são conjugados se e só se têm o mesmo polinômio minimal.

10. Mostre que uma matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ é sempre semelhante à sua transposta $A^t \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

11. Mostre que se todos os autovalores de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ são reais então A é semelhante (sobre $\mathbb{C}$) a uma matriz $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

2.10 A equação $X^m = I$

Nesta seção, aplicaremos alguns resultados vistos para estudar a equação $X^m = I$, onde X é um operador linear sobre o espaço vetorial n-dimensional $\mathbb{V}$ (ou uma matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$). O primeiro resultado nos dá uma classificação razoável das soluções. Antes de prová-lo, uma notação. Um número complexo μ é dito *raiz m-ésima da unidade* se $\mu^m = 1$. Evidentemente, existem m raízes m-ésimas da unidade distintas, a saber,

$$1,\ e^{2\pi i/m},\ e^{2\pi i(2/m)},\ e^{2\pi i(3/m)}, \ldots, e^{2\pi i(m-1/m)}.$$

Proposição 2.65 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{V})$ tal que $T^m = I$ para algum inteiro positivo m. Então, os autovalores de T são raízes da unidade e

(a) Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ então T é diagonalizável;

(b) Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ então $T^{\mathbb{C}}$ é diagonalizável.

Prova. Basta ver que o polinômio $q(\lambda) = \lambda^m - 1$ tem exatamente m raízes complexas distintas, a saber, as m raízes da unidade. Portanto, se $T^m = I$ então q_T divide q, e portanto, q_T tem somente raízes complexas distintas. Em particular, T (ou $T^{\mathbb{C}}$, no caso real) é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$. As raízes de q_T são exatamente os autovalores de T. ∎

No caso $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, a proposição acima implica que existe uma base de V em relação à qual T tem matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

onde $\mu_1,\dots,\mu_n$ são raízes m-ésimas da unidade. Evidentemente, duas matrizes da forma acima são semelhantes se e só se têm os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade algébrica.

Se $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, então podemos decompor $\mathsf{V}=\mathsf{W}\oplus\mathsf{Z}$ como soma de subespaços invariantes tais que q_{T_W} tenha somente raízes reais e q_{T_Z} tenha somente raízes não-reais. Aplicando a mesma argumentação da observação (2.42) e do lema (2.43), obtemos uma base de V em relação à qual T tem matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & & \\ & & & \alpha_1 & -\beta_1 & & & & \\ & & & \beta_1 & \alpha_1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \alpha_l & -\beta_l \\ & & & & & & \beta_l & \alpha_l \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

onde $\lambda_1,\dots,\lambda_k=\pm1$, $\alpha_j,\beta\in\mathbb{R}$ e $\alpha_j^2+\beta_j^2=1$, $j=1,\dots,l$ e os elementos não-indicados são nulos. Como antes, duas matrizes desta última forma são semelhantes se e só se têm os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade algébrica. Estas afirmações provam a proposição abaixo.

Proposição 2.66 Se $T\in\mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $T^m=I$ então existe uma base de V em relação à qual T tem matriz da forma (2.8) ou (2.9), conforme $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. Duas destas soluções são conjugadas entre si se e só se possuem os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades algébricas.

Para valores pequenos de n e m não é difícil determinar o número de soluções não-conjugadas da equação $X^m=I$ e seus respectivos divisores elementares. Façamos isto em um exemplo. Considere a equação

$$X^4=I \tag{2.10}$$

sobre o conjunto $\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ das matrizes reais 5×5. Seja $A\in\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ uma solução da equação (2.10). Como λ^4-1, tem raízes $1,-1,i,-i$, basta considerar as possiblidades abaixo:

1. $q_A(\lambda)=\lambda-1$: Isto implica que $A=I$ e seus 5 divisores elementares são $\lambda-1$,$\lambda-1$, $\lambda-1$,$\lambda-1$, $\lambda-1$;

2. $q_A(\lambda)=\lambda+1$: Isto implica que $A=-I$ e seus 5 divisores elementares são $\lambda+1$, $\lambda+1$, $\lambda+1$, $\lambda+1$, $\lambda+1$;

3. $q_A(\lambda)=\lambda^2+1$: Isto não pode ocorrer, pois p_A deve ter as mesmas raízes que q_A; como o grau de p_A é 5, p_A deve ter pelo menos uma raiz real.

4. $q_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)$: Neste caso, A é diagonalizável e temos 4 classes de semelhança de soluções determinadas pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& 1 & \\ &&&& -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& -1 & \\ &&&& -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && -1 && \\ &&& -1 & \\ &&&& -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & -1 &&& \\ && -1 && \\ &&& -1 & \\ &&&& -1 \end{pmatrix}.$$

Os divisores elementares para cada uma das classes são, respectivamente, $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda+1$; $\lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda+1$; $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, \lambda+1$; $\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda+1$.

5. $q_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)$: Nesta situação, vemos que A deve ter uma das formas de Jordan abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 & -1 && \\ & 1 & 0 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde os elementos não indicados são nulos. Os divisores elementares são $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda^2+1$ e $\lambda-1, \lambda^2+1, \lambda^2+1$, respectivamente.

6. $q_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+1)$: Esta situação é análoga à situação anterior; A deve ter uma das formas de Jordan abaixo:

$$\begin{pmatrix} -1 &&&& \\ & -1 &&& \\ && -1 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 &&&& \\ & 0 & -1 && \\ & 1 & 0 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde os elementos não indicados são nulos. Os divisores elementares são $\lambda+1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda^2+1$ e $\lambda+1, \lambda^2+1, \lambda^2+1$, respectivamente.

7. $q_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$: Neste caso, além de outras duas situações já descritas anteriormente, vemos que A deve ter uma das formas de Jordan abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && -1 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & -1 &&& \\ && -1 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde os elementos não indicados são nulos. Os divisores elementares são $\lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, \lambda^2+1$ e $\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda^2+1$, respectivamente.

Assim, a equação (2.10) tem exatamente 12 classes de semelhança de soluções em $\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$.

Exercícios

1. Determine quantas classes de semelhança existem para cada uma das equações abaixo:

   (a) $X^3 = I$ em $\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$;

   (b) $X^2 = I$ em $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$;

(c) $X^4 = I$ em $\mathrm{M}_6(\mathbb{F})$;

(d) $X^6 = I$ em $\mathrm{M}_7(\mathbb{F})$;

(e) $X^5 = I$ em $\mathrm{M}_4(\mathbb{F})$;

(f) $X^6 = I$ em $\mathrm{M}_6(\mathbb{F})$;

2. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e admitamos que $p(T) = 0$, onde p é um polinômio que possui somente raízes distintas. Mostre que T (ou $T^{\mathbb{C}}$, no caso real) é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

2.11 Raízes m-ésimas

A questão de existência de raízes m-ésimas pode ser colocada em termos bastante gerais: dado um conjunto S munido de uma operação binária $\cdot$ qualquer, um elemento $x \in S$, e m um inteiro positivo, podemos nos perguntar se existe $y \in S$ tal que

$$y^m = \underbrace{y \cdot \ldots \cdot y}_{m\,\text{vezes}} = x\,.$$

Na seção (2.10), tratamos desta questão no caso $S = \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $x = I$. Por exemplo, se $S = \mathbb{C}$ e $\cdot$ é a multiplicação complexa usual, então este problema sempre admite solução (em geral, não única). Já se $S = \mathbb{R}$, o problema nem sempre tem solução, pois se, por exemplo, m é par então x^m é sempre não-negativo. De fato, veremos que uma obstrução deste tipo à existência de raízes m-ésimas aparece também no caso em que $S = \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\cdot$ é a composição de operadores. Outra obstrução que pode aparecer neste caso tem relação com a própria estrutura do operador. Por exemplo, um cálculo simples mostra que se V tem dimensão 2 e a matriz de T em relação à alguma base de V é N_2, então não existe $R \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $R^2 = T$. Veremos a seguir condições que garantem a existência de raízes m-ésimas.

Teorema 2.67 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e m um inteiro positivo. Vamos assumir que $x = 0$ é uma raiz de $q_T(x)$ de multiplicidade no máximo 1. Então são verdadeiras as seguintes afirmações:

1. Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ então existe $S \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $S^m = T$ e $ST = TS$;

2. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e m é *ímpar* então existe $S \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $S^m = T$ e $ST = TS$;

3. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, m é *par* e T não possui autovalores reais negativos, então existe $S \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $S^m = T$ e $ST = TS$.

Prova. Escrevamos $q_T(x) = x^l q(x)$, com $l = 0$ ou $l = 1$. Caso $l = 0$, o operador T é inversível. Caso $l = 1$, pelo teorema da decomposição primária existe uma decomposição $\mathsf{V} = \ker T \oplus \mathsf{Z}$, com $\mathsf{Z} = \ker q(T)$, tal que o polinômio minimal de $T|_{\mathsf{Z}}$ é $q(x)$. Obviamente, $T|_{\mathsf{Z}}$ é inversível e, portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que o próprio operador T é inversível.

Pondo $\alpha = 1/m$, consideremos a série binomial

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\,, \tag{2.11}$$

onde $\binom{\alpha}{0} = 1$ e $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$ para $n \geq 1$. A expressão (2.11) é convergente se $|x| < 1$, mas não estamos interessados nisso. Para nós, a equação (2.11) corresponde simplesmente a uma infinidade de relações entre os números $\binom{\alpha}{n}$, a saber, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\right)^m = 1 + x$.

Se $T = \lambda I + N$ com $\lambda \neq 0$ e N nilpotente, podemos obter, via série binomial, um operador $R \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $R^m = I + \lambda^{-1}N$. Como N é nilpotente, então R é, de fato, um polinômio em N. Em particular, R comuta com N. Se existir $\mu \in \mathbb{F}$ tal que $\mu^m = \lambda$, então o operador $S = \mu R$ é tal que $S^m = T$ e $ST = TS$. Sendo assim, a existência de S fica condicionada à existência de uma raiz m-ésima de λ em $\mathbb{F}$.

Vamos agora dividir a prova em três partes, de acordo com as hipóteses do enunciado.

1. Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, usamos a forma canônica de Jordan para obter uma decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$ de V tal que cada subespaço é invariante por T e T é da forma $\lambda I + N$, $\lambda \neq 0$, em cada um dos W_j. Usando a argumentação do parágrafo anterior e a invariância dos W_j, construímos um operador $S \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $S^m = T$ e $ST = TS$.

2. Suponhamos que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ os autovalores reais e $\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_l, \overline{\mu_l} \in \mathbb{C}$ os autovalores complexos de T, repetidos de acordo com a multiplicidade. Podemos obter uma decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{Z}$ tal que os operadores $T_1 = T|_{\mathsf{W}}$ e $T_2 = T|_{\mathsf{Z}}$ têm $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ e $\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_n, \overline{\mu_n}$ como autovalores, respectivamente. Como os autovalores de T_1 são reais e m é ímpar, a mesma argumentação utilizada no ítem anterior nos fornece um operador S_1 em W tal que $S_1^m = T_1$ e $S_1 T_1 = T_1 S_1$.

   Pelo corolário (2.46), existe uma estrutura complexa $J \in \mathscr{L}(\mathsf{Z})$ que comuta com T_2. Temos que $T_2 \in \mathscr{L}(\mathsf{Z}, J)$ e, portanto, pelo primeiro ítem, existe $S_2 \in \mathscr{L}(\mathsf{Z}, J)$ tal que $S_2^m = T_2$ e $S_2 T_2 = T_2 S_2$. Definindo S como S_1 em W e S_2 em Z, temos o operador procurado.

3. Basta repetir a prova do ítem anterior, observando que, como T não possui autovalores reais negativos, o operador $S_1 \in \mathscr{L}(\mathsf{W})$ é bem-definido, pois m é par.

∎

Exercícios

1. Mostre que nenhum operador nilpotente de índice maior que 1 admite raiz m-ésima.

2. Dada $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ com $\Sigma(A) \subset \mathbb{F}$, sabemos que existe $U \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ inversível tal que $U^{-1}AU = J$ tem blocos de Jordan ao longo da diagonal.

   (a) Mostre que as soluções da equação $X^m = A$ são da forma UYU^{-1} onde Y é solução da equação $Y^m = J$.

   (b) Estude a existência de soluções para esta última equação e reobtenha o teorema (2.67).

   (c) Estude o mesmo problema do ítem anterior sem a hipótese $\Sigma(A) \subset \mathbb{F}$.

2.12 A forma racional

Nas seções anteriores, mostramos como construir a forma de Jordan de um operador linear. No caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tivemos um pouco mais de trabalho, pois nem sempre um operador linear em um espaço real tem todos os autovalores reais. A alternativa encontrada para este problema foi complexificar o espaço, obter a forma de Jordan no complexificado e depois voltar ao espaço original. A forma racional de um operador linear apresenta uma possibilidade de estudar um operador linear $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ *sem sair de* V, conhecendo apenas os fatores irredutíveis de q_T. Para isso, introduzimos o conceito fundamental de vetor cíclico.

Definição 2.68 Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, um vetor $v \in \mathsf{V}$ é dito *vetor cíclico para* T se existe $k > 0$ tal que $\mathscr{B} = \{v, Tv, \ldots, T^{k-1}v\}$ é uma base de V.

Admitamos que $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ possua um vetor cíclico $v \in \mathsf{V}$. Isso significa que q_T deve ter, necessariamente, grau maior ou igual a $k = \dim \mathsf{V}$. Como q_T divide p_T, segue que $q_T = \pm p_T$ e que q_T tem grau k, digamos $q_T(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, com $a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{F}$. Em particular, $T^k v = -a_0 v - a_1 T v - \ldots - a_{k-1} T^{k-1} v$. Logo, a matriz de T em relação à base $\mathscr{B}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

A matriz acima é chamada de *matriz companheira* do polinômio mônico $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ e é denotada por $\mathrm{C}(p)$. Assim, a existência de um vetor cíclico nos permite obter uma base de V em relação à qual a matriz de T tem uma forma bastante simples e pode ser obtida diretamente a partir do polinômio minimal, sem fazer nenhuma referência aos autovalores de T. Isso é especialmente interessante no caso em que os autovalores de T não pertencem a $\mathbb{F}$.

Exemplo 2.69 Um operador nilpotente $N \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ com índice de nilpotência $n = \dim \mathsf{V}$ sempre possui um vetor cíclico, conforme o corolário (2.34). A matriz N_n é a matriz companheira do polinômio λ^n.

Nossos próximos resultados mostrarão que qualquer operador admite uma base em relação à qual sua matriz tem, ao longo da diagonal, as matrizes companheiras dos seus divisores elementares. O teorema (2.36) mostra isto no caso de um operador nilpotente.

Proposição 2.70 Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ tais que $q_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k$. Então V admite uma base em relação à qual a matriz de T tem, ao longo da diagonal, blocos $\mathrm{C}((\lambda-\lambda_0)^{k_1}), \ldots, \mathrm{C}((\lambda-\lambda_0)^{k_r})$, onde $(\lambda-\lambda_0)^{k_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{k_r}$ são os divisores elementares de T.

Prova. Se $(\lambda-\lambda_0)^{k_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{k_r}$ são os divisores elementares de T, então, $k_1, \ldots, k_r$ são os invariantes do operador nilpotente $T - \lambda_0$. Assim, V se escreve como soma direta de subespaços cíclicos para $T - \lambda_0$ (e portanto, para T) de dimensões $k_1, \ldots, k_r$. Assim, V admite uma base em relação à qual a matriz de T tem blocos

$$\mathrm{C}((\lambda-\lambda_0)^{k_1}), \ldots, \mathrm{C}((\lambda-\lambda_0)^{k_r})$$

ao longo da diagonal. ∎

Dados $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $u \in \mathsf{V}$, consideremos o conjunto $\mathsf{V}(u) = \{p(T)u : p \in \mathbb{F}[X]\}$. Evidentemente, $\mathsf{V}(u)$ é um subespaço de V e u é um vetor cíclico para T se e só se $\mathsf{V}(u) = \mathsf{V}$. Para estudarmos melhor $\mathsf{V}(u)$, consideremos $I_u = \{p \in \mathbb{F}[X] : p(T)u = 0\}$. Temos que I_u é um ideal de $\mathbb{F}[X]$, portanto, existe um único polinômio mônico $q_{T,u}$ tal que $q_{T,u}$ divide qualquer $p \in I_u$.

Lema 2.71 São verdadeiras as seguintes afirmações:

1. $q_{T,u}$ divide q_T;

2. A dimensão de $\mathsf{V}(u)$ é o grau de $q_{T,u}$;

3. u é vetor cíclico para T se e só se $q_{T,u} = q_T$.

Prova. Como $q(T)=0$, em particular, $q(T)u=0$, logo, $q_{T,u}$ divide q_T. Além disso, dado qualquer $p\in\mathbb{F}[X]$, escrevendo $p=qq_{T,u}+r$, onde r tem grau menor que o grau de $q_{T,u}$, temos que $p(T)u=q(T)q_{T,u}(T)u+r(T)u=r(T)u$, portanto, $\{u,Tu,\ldots,T^{m-1}u\}$ é um conjunto de geradores para $\mathsf{V}(u)$, onde m é o grau de $q_{T,u}$. Este conjunto é linearmente independente, pois se $\alpha_0u+\alpha_1Tu+\ldots+\alpha_{m-1}T^{m-1}u=0$, então $p(T)u=0$, onde $p(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\ldots+\alpha_{m-1}\lambda^{m-1}$. Isso só pode ocorrer se $\alpha_0=\ldots=\alpha_{m-1}=0$. ∎

Consideremos agora o caso em que $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ e $T\in\mathscr{L}(\mathsf{V})$ tem polinômio minimal $(\lambda^2+a\lambda+b)^n$, com $a^2-4b<0$ e $\dim\mathsf{V}=2n$. Em particular, $q_T=p_T$. Se $\lambda_0\in\mathbb{C}$ é autovalor de T, como $S=T^{\mathbb{C}}$ tem polinômio minimal $(\lambda-\lambda_0)^n(\lambda-\overline{\lambda_0})^n$, obtemos, via teorema da decomposição primária, uma decomposição $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}=\mathsf{W}\oplus\overline{\mathsf{W}}$, com $\mathsf{W}=\ker(S-\lambda_0)^n$. Como a restrição $(S-\lambda_0)|_{\mathsf{W}}$ é nilpotente de índice n e $\dim\mathsf{W}=n$, segue que este último operador tem um vetor cíclico $z=u+iv\in\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. Isso equivale a dizer que z é vetor cíclico de $S|_{\mathsf{W}}$. Vamos agora verificar que u ou v é um vetor cíclico para T.

Pelo lema (2.71), existem inteiros positivos $k,l\le m$ tais que $q_{T,u}=(\lambda^2+a\lambda+b)^j$ e $q_{T,v}=(\lambda^2+a\lambda+b)^l$. Se r é o maior dentre os inteiros j e l, temos que

$$(S^2+aS+b)^r z=(T^2+aT+b)^r u+i(T^2+aT+b)^r v=0,$$

logo, $q_{S,z}=(\lambda-\lambda_0)^n$ divide $q_S(\lambda)=(\lambda^2+a\lambda+b)^r=(\lambda-\lambda_0)^r(\lambda-\overline{\lambda_0})^r$. Disso, decorre que $n\le r$, de onde concluímos que, ou u ou v é um vetor cíclico para T. Esta argumentação prova o resultado abaixo.

Proposição 2.72 Se $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\dim\mathsf{V}=2n$ e $T\in\mathscr{L}(\mathsf{V})$ é tal que $q_T(\lambda)=(\lambda^2+a\lambda+b)^k$ e $a^2-4b<0$, então V admite uma base em relação à qual a matriz de T tem blocos

$$\mathrm{C}((\lambda^2+a\lambda+b)^{k_1}),\ldots,\mathrm{C}((\lambda^2+a\lambda+b)^{k_m})$$

ao longo da diagonal, onde $(\lambda^2+a\lambda+b)^{k_1},\ldots,(\lambda^2+a\lambda+b)^{k_m}$ são os divisores elementares de T.

Prova. A argumentação apresentada na construção dos divisores elementares de T (veja a página 49), nos fornece subespaços T-invariantes $\mathsf{W}_1,\ldots,\mathsf{W}_m$ de dimensões $2k_1,\ldots,2k_m$ tais que, se $T_j=T|_{\mathsf{W}_j}$, então $q_{T_j}(\lambda)=(\lambda^2+a\lambda+b)^{k_j}$, para $j=1,\ldots,m$. A argumentação do parágrafo anterior mostra que cada W_j é T-cíclico, como queríamos. ∎

Os resultados anteriores têm o teorema abaixo como consequência.

Teorema 2.73 (Forma racional) Se $T\in\mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $p_1,\ldots,p_r$ são os divisores elementares de T então existe uma base de V em relação à qual a matriz de T tem blocos $\mathrm{C}(p_1),\ldots,\mathrm{C}(p_r)$ ao longo da diagonal. Esta matriz é chamada de *forma racional de T*.

Prova. Podemos decompor $q_T(\lambda)=q_1(\lambda)^{m_1}\ldots q_k(\lambda)^{m_k}$ de forma que $q_1,\ldots,q_k$ sejam irredutíveis e não tenham raízes comuns. O teorema da decomposição primária nos fornece uma decomposição $\mathsf{V}=\mathsf{W}_1\oplus\ldots\oplus\mathsf{W}_k$, com $\mathsf{W}_j=\ker q_j(T)^{m_j}$ e tal que o polinômio minimal de $T|_{\mathsf{W}_j}$ é $q_j(\lambda)^{m_j}$, para $j=1,\ldots,k$.

No caso $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, cada q_j é da forma $\lambda-\lambda_j$, e podemos aplicar a proposição (2.70) para concluir o resultado, observando que os divisores elementares de $T|_{\mathsf{W}_j}$ são exatamente os divisores elementares de T que possuem λ_j como raiz.

No caso $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, vemos que cada $q_j(\lambda)$ é da forma $\lambda-\lambda_j$, com $\lambda_j\in\mathbb{R}$ autovalor de T ou $\lambda^2+a\lambda+b$ com $a^2-4b<0$. Aplicando as proposições (2.70), (2.72) e as mesmas idéias do parágrafo anterior, concluímos o resultado. ∎

Corolário 2.74 Dois operadores $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ são conjugados se e só se têm a mesma forma racional (a menos de permutações na ordem dos blocos).

Exemplo 2.75 As formas racionais $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$ dos operadores, $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ dos exemplos (2.4), (2.5) e (2.50) são $R_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $R_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$, $R_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $R_4 = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$,

$$R_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; R_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; R_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

A decomposição em subespaços T-cíclicos obtida no teorema (2.73) nos mostra que um operador T tem sempre uma quantidade suficiente de vetores cíclicos que permitem gerar todo o espaço V. Uma questão interessante surge a partir do primeiro ítem do lema (2.71): será que para qualquer divisor de q_T existe $u \in \mathsf{V}$ tal que $q_{T,u} = q$? A resposta é negativa, em geral, pois, por exemplo, um operador nilpotente de índice n em $\mathbb{F}^n$, $n > 2$, não admite nenhum vetor $u \in \mathsf{V}$ tal que $q_{T,u}(\lambda) = \lambda^{n-1}$. A proposição abaixo fornece um caso em que esta é, de fato, a situação.

Proposição 2.76 Se p é um divisor elementar de $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, então existe $u \in \mathsf{V}$ tal que $q_{T,u} = p$.

Prova. Se p é divisor elementar de T então uma das duas situações abaixo ocorre:

① $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r$, $\lambda_0 \in \mathbb{F}$: Isto significa que $T - \lambda_0$ é nilpotente de índice r em um subespaço invariante W de dimensão r; a mesma argumentação utilizada na proposição (2.70) mostra que existe um vetor cíclico $u \in \mathsf{W}$, logo, $q_{T,u} = p$.

② $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $p(\lambda) = (\lambda^2 + a\lambda + b)^r$, com $a^2 - 4b < 0$: Neste caso, existe um subespaço invariante W de dimensão $2r$ tal que $q_{T|_\mathsf{W}} = p$. A discussão anterior à proposição (2.72) mostra que $T|_\mathsf{W}$ tem um vetor cíclico $u \in \mathsf{W}$, e, portanto, $q_{T,w} = p$.

∎

Proposição 2.77 Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, existe $u \in \mathsf{V}$ tal que $q_{T,u} = q_T$.

Prova. Basta observar que se $q_T = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$ é uma decomposição do polinômio minimal com $p_1, \ldots, p_k$ primos entre si, então, temos, pelo teorema da decomposição primária, uma decomposição $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{W}_k$, com $\mathsf{W}_j = \ker p_j(T)^{r_j}$ e $q_{T|_{\mathsf{W}_j}} = p_j^{r_j}$, $j = 1, \ldots, k$. Certamente, os polinômios $p_1^{r_1}, \ldots, p_k^{r_k}$ são divisores elementares de T, portanto, pela proposição anterior, existem $u_1 \in \mathsf{W}_1, \ldots, u_k \in \mathsf{W}_k$ tais que $q_{T,u_j} = p_j^{r_j}$, $j = 1, \ldots, k$.

Seja $u = u_1 + \ldots + u_k$. Se p é qualquer polinômio sobre $\mathbb{F}$ tal que $p(T)u = 0$ então $p(T)u_1 + \ldots + p(T)u_k = 0$; como cada parcela da última soma pertence ao espaço W_j correspondente, segue que $p(T)u_j = 0$, para cada $j = 1, \ldots, k$, e portanto, $p_j^{r_j} = q_{T,u_j}$ divide p, $j = 1, \ldots, k$. Como os polinômios $p_1^{r_1}, \ldots, p_k^{r_k}$ são primos entre si, segue que $q_T = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$ divide p. Isso implica que $q_{T,u} = q_T$. ∎

Corolário 2.78 Um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tem um vetor cíclico se e só se $q_T = p_T$.

Observação 2.79 A construção da forma racional dada aqui difere daquela dada no Teorema 4 da seção 7.2. de [2], a qual descrevemos brevemente. Uma vez obtidos os divisores elementares de $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, separemo-los em subconjuntos $A_1, \ldots, A_k$ de forma que polinômios em um mesmo A_j têm as mesmas raízes. O teorema (2.73) nos diz que a cada divisor elementar de T corresponde um subespaço T-cíclico (de dimensão igual ao grau do polinômio) e que estes subespaços são independentes e têm soma direta igual a V.

Podemos escrever $A_j = \{p_1^{(j)}, \ldots, p_{l_j}^{(j)}\}$, de forma que grau $p_1^{(j)} \geq \ldots \geq$ grau $p_{l_j}^{(j)}$, para cada $j = 1, \ldots, k$. Convencionemos que $p_r^{(j)} = 1$ se $r > l_j$. Considere $q_1 = p_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot p_1^{(k)}$; como[6] a cada um dos polinômios relativamente primos $p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(k)}$ correspondem subespaços T-cíclicos disjuntos de dimensões iguais aos respectivos graus, segue pelo exercício (1) desta seção que existe um subespaço T-cíclico W_1 tal que $q_{T|\mathsf{W}_1} = q_1$. Repetindo o mesmo processo com $q_2 = p_2^{(1)} \cdot \ldots \cdot p_2^{(k)}$, obtemos um subespaço T-cíclico W_2 tal que $q_{T|\mathsf{W}_2} = q_2$. Além disso, q_2 divide q_1. Procedendo indutivamente, seja m o menor inteiro tal que $q_{m+1} = 1$; este é o momento de parar. Quando isto ocorrer, teremos obtido subespaços T-cíclicos independentes $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_m$, cuja soma direta é V, tais que $q_{T|\mathsf{W}_j} = q_j$ e $q_m | q_{m-1} | \ldots | q_2 | q_1$. O leitor é convidado a demonstrar no exercício (2) a seguir que o inteiro m e os polinômios $q_1, \ldots, q_m$ são univocamente determinados. Em particular, obtemos uma base de V em relação à qual a matriz de T tem blocos $\mathrm{C}(q_1), \ldots, \mathrm{C}(q_m)$ ao longo da diagonal. A vantagem em usar esta argumentação é que os blocos $\mathrm{C}(q_1), \ldots, \mathrm{C}(q_m)$ ao longo da diagonal ficam canonicamente arranjados, ao contrário da maneira vista no teorema (2.73), em que a ordem dos blocos ao longo da diagonal não é canônica.

A razão pela qual preferimos não utilizar esta versão da forma racional pode ser compreendida em um exemplo simples. Considere o operador $T_6 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ do exemplo (2.5). Temos que $p_{T_6}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ e $q_{T_6}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, logo, T_6 é diagonalizável e seus divisores elementares são $\lambda - 1$, $\lambda - 1$ e $\lambda - 2$. Procedendo como acima, obtemos $q_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ e $q_2(\lambda) = \lambda - 1$, logo, obtemos uma base de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual T tem matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

algo bem pior do que a forma racional

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dada pelo teorema (2.73). A construção dada no referido teorema é mais próxima daquela feita em [1], Cap. 6.7.

Exercícios

1. Sejam $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2 \subset \mathsf{V}$ subespaços invariantes por $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ com $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2 = \{0\}$. Pondo $\mathsf{W} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$, mostre que se $T|_{\mathsf{W}_1}$ e $T|_{\mathsf{W}_2}$ têm vetores cíclicos e $q_{T|\mathsf{W}_1}, q_{T|\mathsf{W}_2}$ são relativamente primos então $T|_{\mathsf{W}}$ tem vetor cíclico. Generalize o resultado para mais de dois subespaços.[7]

[6] De fato, $q_1 = q_T$.

[7] Dica: Se $u_j \in \mathsf{W}_j$ são vetores cíclicos para $j = 1, 2$, então $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \mathsf{W}$ é vetor cíclico para $T|_{\mathsf{W}}$, para quaisquer $\alpha_j \in \mathbb{R}$, com na prova da proposição (2.77).

2. Mostre que o inteiro m e os polinômios $q_1, \dots, q_m$ da observação (2.79) são univocamente determinados a partir de T.[8]

3. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^9)$ satisfazendo as seguintes condições:

   ☞ $\Sigma(T) = \{1, -2, 1+i, 1-i\}$;

   ☞ $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ *não é* um divisor elementar de T;

   ☞ A multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = -2$ é 3;

   ☞ T possui um único divisor elementar de grau 1, a saber, $\lambda + 2$.

   (a) Determine os polinômios característico, minimal e os divisores elementares de T.

   (b) Determine a forma canônica de Jordan e a forma racional de T.

   (c) Decida se T possui ou não um vetor cíclico. Em caso negativo, determine um subespaço W invariante por T de dimensão máxima tal que $T|_{\mathsf{W}}$ possua um vetor cíclico.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix}
-1 & & & & & & & & & & \\
1 & -1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & -1 & & & & & & & & \\
 & & & 2 & & & & & & & \\
 & & & 1 & 2 & & & & & & \\
 & & & & & 2 & & & & & \\
 & & & & & 1 & 2 & & & & \\
 & & & & & & & 0 & -1 & & \\
 & & & & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

   cujos elementos não-indicados são nulos.

   ① Determine os polinômios característico, minimal e os divisores elementares de A. (Pelo amor de Deus, *não* faça contas!!)

   ② Determine a forma racional de T.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix}
2 & & & & & & & & & \\
 & 0 & -4 & & & & & & & \\
 & 1 & 4 & & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 0 & -3 & & & & \\
 & & & 0 & 1 & 3 & & & & \\
 & & & & & & 0 & -5 & & \\
 & & & & & & 1 & 2 & & \\
 & & & & & & & & 0 & 6 \\
 & & & & & & & & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

   cujos elementos não-indicados são nulos.

[8] Veja a demonstração da proposição (2.59).

(a) Determine os polinômios característico, minimal e os divisores elementares de T.

(b) Determine a forma canônica de Jordan e a forma racional de T.

6. Considere o operador $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{10})$ matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 5 & & & & & & & & & \\ & 0 & -25 & & & & & & & \\ & 1 & 10 & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & 1 & 0 & -5 & & & & \\ & & & 0 & 1 & 6 & & & & \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & -2 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cujos elementos não-indicados são nulos.

(a) Determine os polinômios característico, minimal e os divisores elementares de T.

(b) Determine a forma canônica de Jordan e a forma racional de T.

(c) Determine um subespaço $\mathsf{W} \subset \mathbb{R}^{10}$ invariante por T, de dimensão máxima, tal que $T|_{\mathsf{W}}$ tenha um vetor cíclico.

7. Determine a forma racional dos operadores descritos no exercício (3) da página 44.

8. Encontre todas as possíveis formas racionais, divisores elementares e formas de Jordan para as matrizes:

① $A \in \mathrm{M}_6(\mathbb{R})$ tais que $q_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)^2$;

② $A \in \mathrm{M}_{15}(\mathbb{R})$ tais que $q_A(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)^2(x^3 + 8)^2$;

③ $A \in \mathrm{M}_{10}(\mathbb{R})$ tais que $q_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2(\lambda^3 + 1)$.

9. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. Mostre que todo $u \in \mathsf{V}$ não-nulo é vetor cíclico para T se e só se q_T é irredutível sobre $\mathbb{F}$.

10. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ um operador linear que possui um vetor cíclico $v \in \mathsf{V}$ e tomemos $S \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ qualquer.

(a) Mostre que existe um polinômio $p \in \mathbb{F}[X]$ tal que $Sv = p(T)v$.

(b) Se $ST = TS$, mostre que $S = p(T)$.

Referências Bibliográficas

[1] HERSTEIN, I.N., *Topics in Algebra*, Xerox Publishing, 1975 .

[2] HOFFMANN, K., KUNZE, R., *Álgebra Linear*, Editora Polígono, 1972.