UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM053 - Álgebra Linear II
Prof. José Carlos Eidam

Exercícios

Em toda a lista, V, W denotarão um espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munidos de um produto interno.

1. Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$, mostre que:

   ① $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ e $\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp$;

   ② $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$ e $\operatorname{Im} T = (\ker T^*)^\perp$;

   ③ $\ker(T^* T) = \ker T$ e $\operatorname{Im}(T^* T) = \operatorname{Im} T$;

   ④ $\ker(T T^*) = \ker T^*$ e $\operatorname{Im}(T T^*) = \operatorname{Im} T^*$;

   ⑤ Se T é injetora então $T^* T$ é inversível e $(T^* T)^{-1} T^*$ é uma inversa à esquerda para T;

   ⑥ Se T é sobre então $T T^*$ é inversível e $T^*(T^* T)^{-1}$ é uma inversa à direita para T;

2. Seja $P \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ uma projeção. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes a respeito de T:é dita *ortogonal* se Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes a respeito de uma projeção:

   ① $P^* = P$;

   ② P é normal;

   ③ $u - Pu \perp Pu$ para todo $u \in \mathsf{V}$.

   ④ $\operatorname{Im} P \perp \ker P$;

   ⑤ $\operatorname{Im}(I - P) \perp \ker P$;

   ⑥ $|Pu| \le |u|$ para todo $u \in \mathsf{V}$.

   ⑦ $\langle Pu, u\rangle \ge 0$ para todo $u \in \mathsf{V}$.

   ⑧ $\sup_{|u|=1} |Pu| = 1$.

   Uma projeção satisfazendo alguma das condições acima é dita *ortogonal*.

3. Considere a aplicação

$$\mathscr{L}(\mathsf{V}) \times \mathscr{L}(\mathsf{V}) \ni (S, T) \mapsto \langle S, T\rangle \doteq \operatorname{tr}(S T^*) \in \mathbb{F}.$$

   ① Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno no espaço $\mathscr{L}(\mathsf{V})$.

   ② Seja $\|\cdot\|$ a norma proveniente do produto interno acima. Mostre que

$$\|T\| = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2},$$

   onde $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ são os valores singulares de T.

③ (Para quem se interessar) Defina $\|T\|_\infty = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, para $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. Mostre que T é uma norma em $\mathscr{L}(\mathsf{V})$ satisfazendo $\|T\|_\infty \leq \|T\| \leq \sqrt{n}\|T\|_\infty$, para todo $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$.

4. Mostre que $\Sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \Sigma(T)\}$. Conclua que $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$ se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é auto-adjunto.

5. Seja $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ um subespaço e $i_\mathsf{W} : \mathsf{W} \to \mathsf{V}$ a *aplicação de inclusão*, i.e., $i(w) = w$, para todo $w \in \mathsf{W}$. Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, denotamos por $T|_\mathsf{W}$ a *restrição* de T a W, i.e., $T|_\mathsf{W} : \mathsf{W} \to \mathsf{V}$ é o operador definido por $(T|_\mathsf{W})(w) = Tw$, $w \in \mathsf{W}$.

   ① Mostre que $T|_\mathsf{W} = T \circ i_\mathsf{W}$.

   ② Mostre $i^*_\mathsf{W} : \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ é a projeção ortogonal P_W sobre W.

   ③ Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$, mostre que $(T|_\mathsf{W})^* = P_\mathsf{W} \circ T^*$.

   ④ Mostre que se W é um subespaço invariante para o operador auto-adjunto T, então $T|_\mathsf{W} \in \mathscr{L}(\mathsf{W})$ é auto-adjunto. $T|_\mathsf{W}$ é positivo se T o for.

6. Dado um inteiro positivo m, encontre $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ auto-adjuntos distintos tais que $S^m = T^m$. No exercício seguinte, mostraremos que isso *não* pode ocorrer no caso *positivo*.

7. Sejam $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ *positivos* tais que $S^m = T^m$ para algum inteiro $m > 0$.

   ① Sejam $\mu_1, \dots, \mu_k$ os autovalores de $S^m = T^m$, repetidos de acordo com sua multiplicidade. Mostre que $\mathsf{W}_j = \ker(S^m - \mu_j)$ é invariante por T e $\mu_j \geq 0$, para cada $j = 1, \dots, n$.

   ② Use o exercício (5) para mostrar que $T_j \doteq T|_{\mathsf{W}_j}$ é um operador auto-adjunto positivo em W_j, $j = 1, \dots, n$.

   ③ Use o teorema espectral para mostrar que $T_j u = \lambda_j u$, para todo $u \in \mathsf{W}_j$, onde $0 \leq \lambda_j = \sqrt[m]{\mu_j}$, para cada $j = 1, \dots, n$.

   ④ Conclua que $S = T$.

8. Mostre que um operador inversível $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é positivo se e só se a aplicação

$$\mathsf{V} \times \mathsf{V} \ni (u, v) \mapsto \langle Tu, v \rangle \in \mathbb{F}$$

   é um produto interno em V.

9. Uma aplicação $B : \mathsf{V} \times \mathsf{W} \to \mathbb{F}$ é dita *bilinear* se $B(u + \lambda u', v) = B(u, v) + \lambda B(u', v)$ e $B(u, v + \lambda v') = B(u, v) + \lambda B(u, v')$ para todos $u, u' \in \mathsf{V}$, $v, v' \in \mathsf{W}$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. No caso $\mathsf{V} = \mathsf{W}$, B é dita *simétrica* (resp. *anti-simétrica*) se $B(u, v) = B(v, u)$ (resp. $B(u, v) = -B(v, u)$) para todos $u, v \in \mathsf{V}$. B é dita *positiva* se $B(v, v) \geq 0$ para todo $v \in \mathsf{V}$. Quando $B(v, v) > 0$ para todo $v \neq 0$, dizemos que B é *positiva definida*. B é dita *não-degenerada* se $B(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathsf{W}$ implica $u = 0$ e $B(u, v) = 0$ para todo $u \in \mathsf{V}$ implica $v = 0$. Prove as seguintes afirmações:

   ① Para qualquer aplicação bilinear existe um único $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$ tal que $B(u, v) = \langle Tu, v \rangle$, para todos $u \in \mathsf{V}$, $v \in \mathsf{W}$.

   ② B é simétrica se e só se T é auto-adjunto.

   ③ B é anti-simétrica se e só se T é anti-simétrico.

   ④ B é positiva se e só se T é positivo.

   ⑤ T é bijetor se e só se T é não-degenerada.

10. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ positivo. Prove as seguintes afirmações:

    ① $|\langle Tu, v\rangle| \le \sqrt{\langle Tu, u\rangle}\sqrt{\langle Tv, v\rangle}$ para todos $u, v \in \mathsf{V}$.

    ② Se T é inversível então T^{-1} é positivo.

11. Sejam $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. Mostre que $T = T^*$ se e só se $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $v \in \mathsf{V}$.

12. (Diagonalização simultânea) Se $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ são auto-adjuntos e $ST = TS$ então existe uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n\}$ em V tal que $Su_j = \lambda_j u_j$ e $Tu_j = \mu_j u_j$, para cada $j = 1, \ldots, n$.

13. Generalize o resultado do exercício anterior para uma família $\mathscr{S}$ de operadores auto-adjuntos em V tal que $ST = TS$ para todos $S, T \in \mathscr{S}$.

14. Se $T = T^* \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\langle Tu, u\rangle = 0$ para todo $u \in \mathsf{V}$, mostre que $T = 0$.

15. Seja R o operador de rotação de 90^{o} no sentido anti-horário em $\mathbb{R}^2$. Temos que $\langle Ru, u\rangle = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$. Porque isto não contradiz o problema anterior?

16. Sejam $S, T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ positivos.

    ① Mostre que $S + T$ e αS são positivos, para todo $\alpha \ge 0$.

    ② Mostre que se $ST = TS$ então ST é positivo.

    ③ Mostre $S + T = 0$ se e só se $S = T = 0$.

    ④ Mostre que $\operatorname{tr} T \ge 0$ e $\operatorname{tr} T = 0$ se e só se $T = 0$.

17. Mostre que se $T_1, \ldots, T_k \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ são auto-adjuntos e $T_1^{2l} + \ldots + T_k^{2l} = 0$ para algum inteiro positivo l, então $T_1 = \ldots = T_k = 0$. Mais geralmente, mostre que se $\operatorname{tr}(T_1^{2l} + \ldots + T_k^{2l}) = 0$ então $T_1 = \ldots = T_k = 0$.

18. Calcule a decomposição polar do operador $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ cuja matriz na base canônica é $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

19. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, o conjunto dos operadores ortogonais em V é denotado por $\mathrm{O}(\mathsf{V})$; o subconjunto de $\mathrm{O}(\mathsf{V})$ formado pelos operadores que têm determinante 1 é denotado por $\mathrm{SO}(\mathsf{V})$. Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ o conjunto dos operadores unitários em V é denotado por $\mathrm{U}(\mathsf{V})$; o subconjunto de $\mathrm{U}(\mathsf{V})$ formado pelos operadores que têm determinante 1 é denotado por $\mathrm{SU}(\mathsf{V})$. $\mathrm{U}(\mathsf{V})$ é chamado de *grupo unitário* de $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

    ① Mostre que $\mathrm{O}(\mathsf{V})$ é um grupo munido da operação de composição e $\mathrm{SO}(\mathsf{V}) \subset \mathrm{O}(\mathsf{V})$ é um subgrupo. $\mathrm{O}(\mathsf{V})$ é chamado de *grupo ortogonal* de $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

    ② Mostre que $\mathrm{U}(\mathsf{V})$ é um grupo munido da operação de composição e $\mathrm{SU}(\mathsf{V}) \subset \mathrm{U}(\mathsf{V})$ é um subgrupo. $\mathrm{U}(\mathsf{V})$ é chamado de *grupo ortogonal* de $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

    ③ (Somente para os que se interessarem) Mostre que dois operadores quaisquer em $\mathrm{SO}(\mathsf{V}), \mathrm{U}(\mathsf{V}), \mathrm{SU}(\mathsf{V})$ podem ser conectados por uma curva em $\mathrm{SO}(\mathsf{V}), \mathrm{U}(\mathsf{V}), \mathrm{SU}(\mathsf{V})$, respectivamente. Mostre que isto é falso em $\mathrm{O}(\mathsf{V})$.

20. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ unitário (ou ortogonal, caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) tal que $-1 \notin \Sigma(T)$.

① Mostre que $\mathscr{C}(T) = (I - T)(I + T)^{-1}$ é um operador anti-simétrico. $\mathscr{C}(T)$ é chamado a *transformada de Cayley de T*.

② Dado qualquer S anti-simétrico, mostre que $\mathscr{C}(T)$ é unitário (ortogonal, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$).

③ Mostre que a aplicação $T \mapsto \mathscr{C}(T)$ é injetora.

21. Mostre que qualquer operador anti-simétrico $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ é da forma $Tv = v \times w$, para um único $w \in \mathbb{R}^3$ fixo, onde $\times$ denota o produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$.

22. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$. Definimos $|T|$ como a única raiz quadrada positiva do operador positivo T^*T.

① Mostre que $|T| - T$ e $T + |T|$ são operadores positivos se $T^* = T$.

② Mostre que $\Sigma(|T|) = \{|\lambda| : \lambda \in \Sigma(T)\}$.

③ Mostre que $||T|u| = |Tu|$ para todo $u \in \mathsf{V}$.

23. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ um operador normal. Prove as seguintes afirmações:

① $|Tu| = |T^*u|$, para todo $u \in \mathsf{V}$.

② $\ker T = \ker T^*$ e $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$.

③ Se S é normal e $ST = 0$ então $TS = 0$.

④ $\ker(T - \lambda) = \ker(T^* - \overline{\lambda})$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.

⑤ Se $\lambda, \mu \in \Sigma(T)$ são distintos então $\ker(T - \lambda) \perp \ker(T - \mu)$.

⑥ Se $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ é um subespaço invariante por T então W e $\mathsf{W}^\perp$ são ambos invariantes por T e T^*.

⑦ Se W é invariante por T então $T|_{\mathsf{W}}$ é normal.

⑧ Se T é inversível então T^{-1} é normal.

⑨ Se $\Sigma(T) \subset \mathbb{R}$ então T é auto-adjunto.

24. Mostre que um operador normal e nilpotente é nulo. Conclua daí que todo operador normal é diagonalizável se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

25. Se $T = T^* \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\langle Tu, u \rangle = 0$ para todo $u \in \mathsf{V}$ então $T = 0$.

26. Dado $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $|Tu| = |T^*u|$ para todo $u \in \mathsf{V}$, mostre que T é normal.

27. Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e a $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ a matriz de T em relação à alguma base ortonormal de V. Denotemos os vetores-linha de A por $u_1, \ldots, u_n$ e os vetores-coluna de A por $v_1, \ldots, v_n$. Mostre que T é normal se e só se $u_i \cdot u_j = v_i \cdot v_j$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$, onde $\cdot$ denota o produto interno usual em $\mathbb{F}^n$.

28. Prove as afirmações seguintes a respeito de um operador *normal* $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$:

① Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ então $T \in \mathrm{U}(\mathsf{V})$ se e só se $\Sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

② Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ então $T \in \mathrm{O}(\mathsf{V})$ se e só se $\Sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.