UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM053 - Álgebra Linear II (Matemática - Matemática Industrial)
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

PRIMEIRA PROVA - GABARITO

Nome: ______________________________

No. Matrícula: ____________________ **Assinatura:** ____________________

Justifique todas as suas afirmações.

Questão 1 (2,5 pontos) Considere o subespaço $\mathsf{W} \subset \mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $u_1 = (1, 2, 0, 0, 5)$, $u_2 = (0, 1, 1, 2, 0)$, $u_3 = (0, 1, 2, -3, 1)$ e $u_4 = (1, 5, 5, -4, 7)$ e os funcionais lineares φ_1, φ_2 em $\mathbb{R}^5$ dados por

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + x_4\,, \\ \varphi_2(x) &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + x_5\,, \end{aligned}$$

para cada $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Calcule os valores de a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 para os quais $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ é uma base de W^o.

Solução. Primeiramente, encontramos um conjunto de geradores para W via escalonamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que $\{u_1, u_2, u_3'\}$ é uma base para W, onde $u_3' = (1, -5, 1)$. Se $\varphi(x) = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 + \lambda_4x_4 + \lambda_5x_5$ é um funcional linear que pertence a W^o então $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \varphi(u_3') = 0$, portanto,

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_5 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 - 5\lambda_4 + \lambda_5 &= 0 \end{cases}.$$

Escolhendo λ_4 e λ_5 como parâmetros, temos que

$$\begin{cases} \lambda_1 &= 14\lambda_4 - 7\lambda_5 \\ \lambda_2 &= -7\lambda_4 + \lambda_5 \\ \lambda_3 &= 5\lambda_4 - \lambda_5 \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 + \lambda_4x_4 + \lambda_5x_5 \\ &= (14\lambda_4 - 7\lambda_5)x_1 + (-7\lambda_4 + \lambda_5)x_2 + (5\lambda_4 - \lambda_5)x_3 + \lambda_4x_4 + \lambda_5x_5 \\ &= \lambda_4(14x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4) + \lambda_5(-7x_1 + x_2 - x_3 + x_5)\,, \end{aligned}$$

para qualquer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Em particular, $\varphi_1(x) = 14x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4$ e $\varphi_2(x) = -7x_1 + x_2 - x_3 + x_5$ formam uma base de W^o. Portanto, $a_1 = 14$, $a_2 = -7$, $a_3 = 5$ e $b_1 = -7$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$. ∎

Questão 2 Considere a base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formada pelos vetores $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,-1,0)$ e $u_3 = (1,0,-1)$ e sua base dual $\mathscr{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

1. **(2 pontos)** Determine φ_1, φ_2 e φ_3.

2. **(2 pontos)** Sejam W_1 o subespaço gerado pelos vetores u_1 e u_2 e W_2 o subespaço gerado por u_3. Considere a decomposição

$$\mathbb{R}^3 = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2\,,$$

e o operador P de projeção sobre W_1 relativamente à decomposição acima. Calcule a matriz de P em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Solução.

1. Dado $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, sejam $\lambda_i = \varphi_i(x)$, para $1 \leq i \leq 3$. Sabemos que

$$x = \varphi_1(x)u_1 + \varphi_2(x)u_2 + \varphi_3(x)u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3\,,$$

isto é,

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,-1,0) + \lambda_3(1,0,-1)\,.$$

Resolvendo esta última equação para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, temos $\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = \lambda_1 = \frac{x_1+x_3}{2}$, $\varphi_2(x_1,x_2,x_3) = \lambda_2 = -x_2$ e $\varphi_3(x_1,x_2,x_3) = \lambda_3 = \frac{x_1-x_3}{2}$.

2. Temos que

$$\begin{aligned} P(x_1,x_2,x_3) &= \varphi_1(x_1,x_2,x_3)u_1 + \varphi_2(x_1,x_2,x_3)u_2 \\ &= \frac{1}{2}(x_1+x_3)(1,0,1) - x_2(0,-1,0) \\ &= \left(\frac{x_1+x_3}{2}, x_2, \frac{x_1+x_3}{2}\right), \end{aligned}$$

para qualquer $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$. A matriz deste operador em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

∎

Questão 3 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $P : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ um operador linear.

1. **(2 pontos)** Mostre que P é uma projeção se e só se $P^t : \mathsf{V}^* \to \mathsf{V}^*$ é uma projeção.
2. **(1,5 ponto)** Assumindo que P é uma projeção, mostre que

$$\ker P^t = (\ker(I - P))^{\mathrm{o}} \ \text{e} \ \mathrm{Im}\, P^t = (\mathrm{Im}\,(I - P))^{\mathrm{o}}.$$

Solução.

1. Se P é uma projeção então $P^2 = P$. Isto implica que $(P^t)^2 = (P^2)^t = P^t$, e portanto P^t é uma projeção.

   Reciprocamente, admitindo que P^t é uma projeção, temos que $(P^t)^2 = P^t$. Disso decorre que $P^t(I - P^t) = 0$ e portanto, $\mathrm{Im}\,(I - P^t) \subset \ker P^t$. Assim, $(\ker(I - P))^{\mathrm{o}} = \mathrm{Im}\,(I - P^t) \subset \ker P^t = (\mathrm{Im}\, P)^{\mathrm{o}}$ e portanto, $\mathrm{Im}\, P \subset \ker(I - P)$. Isso implica que $(I - P)P = 0$, isto é, P é uma projeção.

2. Como P é uma projeção, temos que $\ker P = \mathrm{Im}\,(I - P)$, portanto, $\ker P^t = (\mathrm{Im}\, P)^{\mathrm{o}} = (\ker(I - P))^{\mathrm{o}}$ e $\mathrm{Im}\, P^t = (\ker P)^{\mathrm{o}} = (\mathrm{Im}\,(I - P))^{\mathrm{o}}$.

∎