UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM053 - Álgebra Linear II (Matemática - Matemática Industrial)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - 28/03/2012

Questão 1 Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (-1,2,3,0)$ e $u_4 = (1,0,-1,0)$.

(a) **(1,5 ponto)** Determine uma base para W^o.

Solução. Escalonando, percebemos que u_1, u_2 são linearmente independentes e u_3, u_4 são combinação linear de u_1, u_2, portanto, $\{u_1, u_2\}$ é uma base de W. Um funcional linear $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$ anula W se e só se $a_1 + a_2 = 0$ e $a_2 + a_3 = 0$, logo,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1(x_1 - x_2 + x_3) + a_4x_4 ,$$

de onde concluímos que $\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 + x_3$ e $\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$ formam uma base para W^o. ∎

(b) **(1,5 ponto)** Seja Z o subespaço gerado por $v_1 = (0,0,1,1)$, $v_2 = (0,0,0,1)$ e $v_3 = (0,0,2012,2013)$. Mostre que $\mathsf{W} \oplus \mathsf{Z} = \mathbb{R}^4$.

Solução. Escalonando, percebemos que v_1, v_2 são linearmente independentes e v_3 é combinação linear de v_1, v_2, portanto, $\{v_1, v_2\}$ é uma base de W. Devemos provar que $\mathsf{W} + \mathsf{Z} = \mathbb{R}^4$ e $\mathsf{W} \cap \mathsf{Z} = \{0\}$. Para provar a primeira afirmação, basta observar que $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Para a segunda, basta observar que o sistema

$$\alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(0,1,1,0) = \alpha_3(0,0,1,1) + \alpha_4(0,0,0,1)$$

possui somente a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ou usar o fato que $4 = \dim(\mathsf{W} + \mathsf{Z}) = \dim \mathsf{W} + \dim \mathsf{Z} - \dim(\mathsf{W} \cap \mathsf{Z}) = 4 - \dim(\mathsf{W} \cap \mathsf{Z})$. ∎

(c) **(1,5 ponto)** Calcule a matriz, em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$, do operador $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de projeção sobre W paralelamente a Z.

Solução. Dado $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, vamos obter $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$, i.e.,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & x_2 \\ \alpha_2 + \beta_1 & = & x_3 \\ \beta_1 + \beta_2 & = & x_4 \end{array}\right. .$$

Assim, $\alpha_1 = x_1$, $\alpha_2 = x_2 - x_1$, $\beta_1 = x_3 - x_2 + x_1$ e $\beta_2 = x_4 - x_3 + x_2 - x_1$. O operador P, por definição, satisfaz

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = x_1(1,1,0,0) + (x_2 - x_1)(0,1,1,0) = (x_1, x_2, x_2 - x_1, 0) ,$$

portanto, sua matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

∎

(d) **(1,5 ponto)** Eventualmente descartando os vetores de índices maiores, encontre uma base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathscr{B} \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3\}$ e determine sua base dual.

Solução. A base obtida descartando os vetores de índices maiores é $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ e sua base dual $\mathscr{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2\}$ já foi determinada no ítem anterior:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_1 \\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_1 - x_2 \\ \psi_1(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_3 - x_2 + x_1 \\ \psi_2(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_4 - x_3 + x_2 - x_1 \end{array}.$$

∎

Questão 2 Prove as seguintes afirmações:

(a) **(2 pontos)** Um operador linear $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{W})$ é injetor se e só se $T^t \in \mathscr{L}(\mathsf{W}^*,\mathsf{V}^*)$ é sobrejetor.

Solução. Basta observar que $(\ker T)^o = \operatorname{Im} T^t$ e usar o fato que $\mathsf{Z}^o = \mathsf{Z}^*$ se e só se $\mathsf{Z} = \{0\}$. (Provado em aula) ∎

(b) **(2 pontos)** Sejam $\mathsf{Z} \subset \mathsf{W}$ um subespaço e $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{W})$. Então $\operatorname{Im} T \subset \mathsf{Z}$ se e só se $\mathsf{Z}^o \subset \ker T^t$.

Solução. Assumindo que $\operatorname{Im} T \subset \mathsf{Z}$, temos que $(T^t\varphi)(u) = \varphi(Tu) = 0$ para todos $u \in \mathsf{Z}$ e $\varphi \in \mathsf{Z}^o$, logo $T^t\varphi = 0$. Reciprocamente, temos $\mathsf{Z}^o \subset \ker T^t = (\operatorname{Im} T)^o$. Tomando anuladores, temos que $\Lambda(\mathsf{Z}) = \mathsf{Z}^{oo} \supset (\operatorname{Im} T)^{oo} = \Lambda(\operatorname{Im} T)$, onde $\Lambda : \mathsf{V} \to \mathsf{V}^{**}$ é o isomorfismo canônico. Como Λ é bijetora, segue que $\mathsf{Z} \supset \operatorname{Im} T$. ∎