UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM053 - Álgebra Linear II (Matemática - Matemática Industrial)
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

SEGUNDA PROVA - 11/05/2011
GABARITO

Nome: ______________________________

No. Matrícula: ______________ **Assinatura:** ______________

Justifique todas as suas afirmações.

Questão 1 Considere o operador $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

① **(1 ponto)** Calcule o polinômio característico de T.

② **(1,5 ponto)** Calcule o polinômio minimal de T.

③ **(3 pontos)** Determine a forma canônica de Jordan de T.

Solução.

① O polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^3$.

② As possibilidades para $q_T(\lambda)$ são $(\lambda - 2)(\lambda - 1)$, $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$ e $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^3$. Fazendo as contas, vemos que $(T - 2I)(T - I) \neq 0$ mas $(T - 2I)(T - I)^2 = 0$, logo, $q_T(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$.

③ Vemos que $\dim \ker(T - 2I) = 1$, portanto, pelo teorema da decomposição primária, $\dim \ker(T - I)^2 = 3$. Sabemos que a restrição de $T - I$ a $\ker(T - I)^2$ é um operador nilpotente de índice 2, portanto, existe uma base de $\mathbb{R}^4$ em relação à qual T tem matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta é a forma canônica de Jordan de T.

∎

Questão 2 Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando a sua resposta (respostas sem justificativa não serão aceitas):

① **(1 ponto)** Um operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ de posto 1 é diagonalizável ou nilpotente.[1]

② **(1,5 ponto)** Para qualquer $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ tal que $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$, tem se que

$$\operatorname{tr}(T^8 + 3T^6 + 5T^4 + 3T^2 + 2) \geq 2 \dim \mathsf{V}\,.$$

③ **(1 ponto)** O operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base canônica é $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ é diagonalizável.

④ **(1 ponto)** Se $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^7)$ é tal que $p_T(\lambda) = (\lambda-2)^4(\lambda-1)^3$ e $q_T(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)^2$ então a forma de Jordan de T é, necessariamente,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 2 & 0 & & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

onde os elementos não-indicados são nulos.

Solução.

① **(Verdadeiro)** Como T tem posto 1, existe uma base de V em relação à qual T tem matriz $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Em particular, o polinômio característico de T é $p_T(x) = (-1)^n x^{n-1}(x - a_1)$, $n = \dim \mathsf{V}$. Se $a_1 = 0$ então T é nilpotente. Caso contrário, o polinômio minimal de T é $q_T(x) = x(x - a_1)$. Como este polinômio só possui raízes simples, segue que T é diagonalizável.

② **(Verdadeiro)** Como $\Sigma(T) \subset \mathbb{F}$, V admite uma base em relação à qual a matriz A de T é triangular superior. A diagonal de A é formada exatamente pelos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de T, contados de acordo com sua multiplicidade. Dado um polinômio qualquer p com coeficientes em $\mathbb{F}$, vemos que a diagonal de $p(A)$ é da forma $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$, $n = \dim \mathsf{V}$. Em particular, estes últimos são os autovalores de $p(T)$ e, portanto, $\operatorname{tr}(p(T)) = \sum_{j=1}^n p(\lambda_j)$. Tomando $p(x) = x^8 + 3x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 2$, temos que $\operatorname{tr}(p(T)) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^8 + 3\lambda_j^6 + 5\lambda_j^4 + 3\lambda_j^2 + 2 \geq 2 \dim \mathsf{V}$.

③ **(Falso)** Os polinômios característico e minimal de T são $(\lambda-2)^2$. Em particular, T não é diagonalizável, pois seu polinômio minimal tem raízes repetidas.

[1] O *posto* de de um operador linear é a dimensão de sua imagem.

④ **(Falso)** Outra possibilidade para a forma canônica de Jordan de T é

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 2 & 0 & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

∎