UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM053 - Álgebra Linear II (Matemática - Matemática Industrial)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA SEGUNDA PROVA - 25/04/2012

Questão 1 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ o operador cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) **(1,5 ponto)** Determine os polinômios característico e minimal de T e os autovalores de T.

Solução. Fazendo as contas, obtemos que $p_T(\lambda) = q_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$. Os autovalores de T são $1, -1, i, -i$. ∎

(a) **(1,5 ponto)** Decida se T é diagonalizável.

Solução. T não é diagonalizável em $\mathbb{R}^4$ pois possui autovalores não-reais. ∎

Questão 2 Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta (respostas sem justificativa não serão consideradas):

(a) **(2 pontos)** Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ então qualquer $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ possui um subespaço invariante de dimensão 1 e um subespaço invariante de dimensão $n-1$, onde $n = \dim \mathsf{V}$.

Solução. A afirmação é *verdadeira*. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de T. Se $u \in \mathsf{V}$ é um vetor não-nulo tal que $Tu = \lambda u$ (aqui foi usada a hipótese que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), então o subespaço gerado por u é um subespaço invariante por T de dimensão 1. Como $p_T = p_{T^t}$, segue que λ é autovalor de T^t, portanto existe $\varphi \in \mathsf{V}^*$ não-nulo tal que $T^t\varphi = \lambda\varphi$. Assim, $\mathsf{W} = \ker\varphi$ é um subespaço invariante por T de dimensão $n-1$. ∎

(b) **(2 pontos)** O operador $T \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^3)$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 2012 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

é diagonalizável para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}$.

Solução. A afirmação é *falsa*. Calculando os polinômios minimal e característico de T, obtemos $p_T(\lambda) = q_T(\lambda) = -(\lambda-2012)(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\overline{\lambda_0})$, onde $\lambda_0 = \frac{1}{2}(a+b\pm\sqrt{(a-b)^2+4})$. Se $a-b = \pm 2i$, este polinômio tem raízes repetidas, portanto, T não é diagonalizável. ∎

Questão 3 Sejam A, B matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ e m um inteiro positivo tais que:

① $A^m = B^m$;

② $AB = BA$.

Definimos $U_m \doteq \{z \in \mathbb{F} : z^m = 1\}$.

1. **(2 pontos)** Se A e B são diagonalizáveis e $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{F}$ são autovalores de A, B, respectivamente, então existe $z \in U_m$ tal que $\lambda_A = z\lambda_B$.

   Solução. Vimos em aula que dois operadores (matrizes) que são diagonalizáveis e comutam são *simultaneamente diagonalizáveis*, i.e., existe uma base de $\mathsf{V} = \mathbb{C}^m$ formada por autovetores de A e B. Se $u \in \mathsf{V}$ é não-nulo e $Au = \lambda_A u$ e $Bu = \lambda_B u$, então $\lambda_A^m u = A^m u = B^m u = \lambda_B^m u$. Se um dos autovalores é nulo então, evidentemente o outro também é nulo. Se ambos são não-nulos, então tomando $z = \lambda_A/\lambda_B$ temos $z^m = 1$ e $\lambda_A = z\lambda_B$, como queríamos. (Este ítem pode ser concluído diretamente, sem a hipótese que A, B sejam diagonalizáveis; basta lembrar que, pela forma triangular, os autovalores de T^m são da forma λ^m, onde λ é autovalor de T.) ∎

2. **(2 pontos)** Use a decomposição $T = D + N$ para estender o resultado do ítem anterior à situação em que A, B não são necessariamente diagonalizáveis. Conclua que, se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, a equação matricial $X^m = I$ tem exatamente m^n soluções não-semelhantes entre si.

   Solução. Se $A = D_A + N_A$ e $B = D_B + N_B$, com D_A, D_B diagonalizáveis e N_A, N_B nilpotentes comutando entre si, então, vimos em sala que $A^m = D_A^m + N_1$ e $B^m = D_B^m = N_2$ com N_1, N_2 nilpotentes, comutando com D_A, D_B, respectivamente. Logo, por hipótese, $D_A^m - D_B^m = N_2 - N_1$. Como $D_A^m - D_B^m$ é diagonalizável e nilpotente, segue que $D_A^m - D_B^m = 0$. Como D_A, D_B têm os mesmos autovalores que A, B, respectivamente, o resultado segue. ∎