UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM053 - Álgebra Linear II (Matemática - Matemática Industrial)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA TERCEIRA PROVA - 23/05/2012

Questão 1 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ o operador cuja matriz em relação à base canônica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 pontos)** Determine a forma canônica de Jordan de T.

Solução. Fazendo as contas, vemos que $p_T(\lambda) = q_T(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = (\lambda - (1+i))^2(\lambda - (1-i))^2$. Portanto, a forma canônica de Jordan é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

∎

(b) **(1,5 ponto)** Determine os divisores elementares de T. Decida se T é conjugado ao operador S cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução. O único divisor elementar de T é o próprio polinômio característico $(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$. Os divisores elementares de S são $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ e $\lambda^2 - 2\lambda + 2$, portanto, T e S não são conjugados. ∎

(c) **(1,5 ponto)** Determine a forma canônica de Jordan do operador $T^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$.

Solução. O operador $T^{\mathbb{C}}$ tem os mesmos polinômio característico e minimal que T, conforme vimos em aula, portanto, a forma de Jordan de $T^{\mathbb{C}}$ é

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

∎

Questão 2 **(3 pontos)** Sejam A, B matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tais que:

① $p_A = p_B = p$ e $q_A = q_B = q$;

② p não tem raiz de multiplicidade > 4;

③ q não tem raiz de multiplicidade 2.

Mostre que A e B são semelhantes sobre $\mathbb{F}$.

Solução. Consideremos primeiramente que os autovalores de A e B pertencem todos a $\mathbb{F}$ e escrevamos $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$, com os λ_j's distintos. Como $p_A = p_B = p$, segue que A, B têm os mesmos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, inclusive com multiplicidades iguais para A e B. Decompondo $q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$ e aplicando o teorema da decomposição primária a cada operador, obtemos decomposições

$$\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \dots \oplus \mathsf{W}_k = \mathsf{Z}_1 \oplus \dots \oplus \mathsf{Z}_k$$

onde $\mathsf{W}_j = \ker(A - \lambda_j)^{r_j}$ e $\mathsf{Z}_j = \ker(B - \lambda_j)^{r_j}$, para $j = 1, \dots, k$. Como as raízes de p têm multiplicidade > 4, segue que os subespaços $\mathsf{W}_1, \dots, \mathsf{W}_k, \mathsf{Z}_1, \dots, \mathsf{Z}_k$ têm dimensão ≤ 4 (pois $\dim \mathsf{W}_j = \dim \mathsf{Z}_j = r_j$, $j = 1, \dots, k$). Como q não tem raízes de multiplicidade 2 ($l_j \neq 2$), segue que nenhumas das restrições $(A - \lambda_j)|_{\mathsf{W}_j}$, $(B - \lambda_j)|_{\mathsf{Z}_j}$ é nilpotente de índice 2, ou seja, estes operadores são nilpotentes de índices 1, 3 ou 4. Se $l_j = 1$, o autovalor λ_j corresponde a r_j divisores elementares $\lambda - \lambda_j, \dots, \lambda - \lambda_j$ tanto para S quanto para T. Se $l_j = 3$, o autovalor λ_j corresponde ao divisor elementar $(\lambda - \lambda_j)^3$; caso $l_j = 4$, o autovalor corresponde ao divisor elementar $(\lambda - \lambda_j)^4$ (só há uma forma canônica possível para operadores nilpotentes de índices 3 e 4 em um espaço vetorial de dimensão 4). Assim, A, B têm os mesmos divisores elementares, portanto, são semelhantes.

No caso geral, basta decompor $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{Z}$ de forma que $A|_{\mathsf{W}}, B|_{\mathsf{W}}$ tenham somente autovalores reais e $A|_{\mathsf{Z}}, B|_{\mathsf{Z}}$ tenham somente autovalores não-reais e aplicar o parágrafo anterior. ∎

Questão 3 Sobre o conjunto $\mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ das matrizes reais 5×5, considere a equação

$$X^4 = I. \tag{1}$$

1. **(2 pontos)** Mostre que existem em $\mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ exatamente **12** classes de semelhança de soluções para a equação (1). Determine um representante para cada uma destas classes.

2. **(2 pontos)** Determine os divisores elementares para cada classe de semelhança.

3. **(1 ponto)** Mostre que as soluções da equação (1) são diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$.

   Solução. Seja $A \in \mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ uma solução da equação (1). Vemos que q_A divide $\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Basta considerar as possiblidades abaixo:

   (a) $q_A(\lambda) = \lambda - 1$: Isto implica que $A = I$ e seus 5 divisores elementares são $\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda$;

   (b) $q_A(\lambda) = \lambda + 1$: Isto implica que $A = -I$ e seus 5 divisores elementares são $-\lambda, -\lambda, -\lambda, -\lambda, -\lambda$;

   (c) $q_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$: Isto não pode ocorrer, pois p_A deve ter as mesmas raízes que q_A; como o grau de p_A é 5, p_A deve ter pelo menos uma raiz real.

   (d) $q_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$: Neste caso, A é diagonalizável e temos 4 classes de semelhança de soluções com seus respectivos divisores elementares:

Representante	Divisores elementares
$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& 1 & \\ &&&& -1 \end{pmatrix}$	$\lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda+1$
$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& -1 & \\ &&&& -1 \end{pmatrix}$	$\lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda+1$
$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && -1 && \\ &&& -1 & \\ &&&& -1 \end{pmatrix}$	$\lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, \lambda+1$
$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & -1 &&& \\ && -1 && \\ &&& -1 & \\ &&&& -1 \end{pmatrix}$	$\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda+1$

(e) $q_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)$: Nesta situação, vemos que A deve ter uma das formas de Jordan abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 & -1 && \\ & 1 & 0 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde os elementos não indicados são nulos. Os divisores elementares são $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda^2+1$ e $\lambda-1, \lambda^2+1, \lambda^2+1$, respectivamente.

(f) $q_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+1)$: Esta situação é análoga à situação anterior; A deve ter uma das formas de Jordan abaixo:

$$\begin{pmatrix} -1 &&&& \\ & -1 &&& \\ && -1 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 &&&& \\ & 0 & -1 && \\ & 1 & 0 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde os elementos não indicados são nulos. Os divisores elementares são $\lambda+1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda^2+1$ e $\lambda+1, \lambda^2+1, \lambda^2+1$, respectivamente.

(g) $q_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$: Neste caso, além de outras duas situações já descritas anteriormente, vemos que A deve ter uma das formas de Jordan abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && -1 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & -1 &&& \\ && -1 && \\ &&& 0 & -1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde os elementos não indicados são nulos. Os divisores elementares são $\lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, \lambda^2+1$ e $\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1, \lambda^2+1$, respectivamente.

Todos os casos estudados produzem matrizes não-semelhantes entre si, pois os divisores elementares são distintos. As soluções são todas diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$, pois seu polinômio minimal tem somente raízes de multiplicidade 1.

∎