UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM053 - Álgebra Linear II (Matemática - Matemática Industrial)
Prof. José Carlos Eidam

TERCEIRA PROVA - 15/06/2011
GABARITO

Questão 1 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^9)$ tal que:

① $\Sigma(T) = \{2+i,\ 2-i,\ 1, 0\}$;

② $2 - i$ é raiz dupla de q_T;

③ $\dim \ker(T^2 - 4T + 5I)^2 = 6$ e

④ $\dim \operatorname{Im} T = 7$.

Determine:

(a) **(1 ponto)** Os polinômios p_T e q_T.

(b) **(2,5 pontos)** A forma canônica de Jordan real de T.

(c) **(1,5 ponto)** Os divisores elementares de T.

Solução. As informações do enunciado implicam que $p_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+5)^3$ e $q_T(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+5)^2$. Assim, a forma canônica de Jordan de T é

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 2 & -1 & & & & \\ & & & 1 & 2 & & & & \\ & & & 1 & 0 & 2 & -1 & & \\ & & & 0 & 1 & 1 & 2 & & \\ & & & & & & & 2 & -1 \\ & & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e seus divisores elementares são $\lambda - 0, \lambda - 0, \lambda - 1, (\lambda^2 - 4\lambda + 5)^2$ e $\lambda^2 - 4\lambda + 5$.

∎

Questão 2 (2 pontos) Considere as matrizes reais

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que a multiplicidade de $\lambda = 1+i$ como raiz de q_A e de q_B coincide com a multiplicidade de λ como raiz de p_A e p_B, respectivamente, mostre são semelhantes sobre $\mathbb{R}$.

Solução. Temos que $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+2)^2$ e $q_A(\lambda) = q_B(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+2)^2$, logo A e B tem a mesma forma de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e portanto, são semelhantes. ∎

Questão 3 Nesta questão, V denota um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ munido de um produto interno e T^* denota o operador *adjunto* de T. Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando a sua resposta (respostas sem justificativa não serão aceitas):

① **(1 ponto)** Se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é um operador normal então $\ker(T-\lambda) = \ker(T^* - \overline{\lambda})$ e $\operatorname{Im}(T-\lambda) = \operatorname{Im}(T^* - \overline{\lambda})$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.

Solução. A normalidade de T é equivalente a termos $|(T-\lambda)u| = |T^* - \overline{\lambda})u|$, portanto, $\ker(T-\lambda) = \ker(T^* - \overline{\lambda})$. Também é verdade que $\operatorname{Im}(T^* - \overline{\lambda}) = \operatorname{Im}(T-\lambda)^* = \ker(T-\lambda)^\perp = \ker(T^* - \overline{\lambda})^\perp = \operatorname{Im}(T-\lambda)$. Portanto, a afirmação é **verdadeira**. ∎

② **(1 ponto)** Os divisores elementares de um operador ortogonal são todos da forma $\lambda \pm 1$.

Solução. Um operador ortogonal pode ter autovalores complexos, portanto, a afirmação é **falsa**. ∎

③ **(1 ponto)** Se $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ é auto-adjunto e $\operatorname{tr}(T^2 + T^4 + T^6 + \ldots + T^{2010} + T^{2012}) = 0$ então $T = 0$.

Solução. O traço de um operador é a soma de seus autovalores; em particular, um operador positivo tem traço não-negativo. Seu traço é nulo se e só se todos os seus autovalores são nulos. Isso implica, pelo teorema espectral, que o próprio operador é nulo. Como a soma de operadores positivos é um operador positivo, a afirmação é **verdadeira**. ∎