UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM053 - Álgebra Linear II (Matemática - Matemática Industrial)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA QUARTA PROVA - 20/06/2012

Questão 1 Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^9)$ satisfazendo as seguintes condições:

① $\Sigma(T) = \{1, -2, 1+i, 1-i\}$;

② $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ *não é* um divisor elementar de T;

③ A multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = -2$ é 3;

④ T possui um único divisor elementar de grau 1, a saber, $\lambda + 2$.

(a) **(2 pontos)** Determine os polinômios característico, minimal e os divisores elementares de T.

Solução. Temos que $q_T(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)^2(\lambda^2-2\lambda+2)^2$, $p_T(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)^3(\lambda^2-2\lambda+2)^2$ e os divisores elementares de T são $(\lambda-1)^2, (\lambda+2)^2, \lambda+2, (\lambda^2-2\lambda+2)^2$. ∎

(b) **(3 pontos)** Determine a forma canônica de Jordan e a forma racional de T.

Solução. As formas de Jordan e racional de T são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & \\ & & -2 & & & & & & \\ & & 1 & -2 & & & & & \\ & & & & -2 & & & & \\ & & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 0 & 1 & -1 \\ & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & & & \\ & & 0 & -4 & & & & & \\ & & 1 & -4 & & & & & \\ & & & & -2 & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & -4 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 8 \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & -8 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

∎

(c) **(2 pontos)** Decida se T possui ou não um vetor cíclico. Em caso negativo, determine um subespaço W invariante por T de dimensão máxima tal que $T|_{\mathsf{W}}$ possua um vetor cíclico.

Solução. T não possui vetor cíclico, pois $p_T \neq q_T$. O subespaço invariante de maior dimensão restrito ao qual T possui um vetor cíclico é $\mathsf{W} = \ker(T-1)^2 \oplus \ker(T^2-2T+2)^2$. de dimensão 6. ∎

Questão 2 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & 1 & -1 & & & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & & & \\ & & & 1 & 2 & & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & & \\ & & & & & 1 & 2 & & & & \\ & & & & & & & 0 & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cujos elementos não-indicados são nulos.

① **(2 pontos)** Determine os polinômios característico, minimal e os divisores elementares de A. (Pelo amor de Deus, *não* faça contas!!)

Solução. Como T está na forma de Jordan, seus divisores elementares são $(\lambda+1)^3, (\lambda+2)^2, (\lambda+2)^2, (\lambda^2+1)^2$, seu polinômio característico é $p_T(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda+2)^4(\lambda^2+1)^2$ e seu polinômio minimal é $q_T(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda+2)^2(\lambda^2+1)^2$. ∎

② **(2 pontos)** Determine a forma racional de T.

Solução. A forma racional de T é

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & 1 & -1 & & & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & & & \\ & & & 1 & 2 & & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & & \\ & & & & & 1 & 2 & & & & \\ & & & & & & & 0 & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

∎

Questão 3 Sejam $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2 \subset \mathsf{V}$ subespaços invariantes para T tais que $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$. Denotemos por T_1, T_2 as restrições de T a W_1 e W_2, respectivamente.

1. **(2 pontos)** Prove que q_T é o mínimo múltiplo comum entre q_{T_1} e q_{T_2}.

   Solução. Como $q_T(T) = 0$, segue que q_{T_1} e q_{T_2} dividem q_T. Se p é um múltiplo comum de q_{T_1} e q_{T_2}, então, $p(T) = 0$, logo, q_T divide p. Isso mostra que q_T é o mínimo múltiplo comum entre q_{T_1} e q_{T_2}. ∎

2. **(3 pontos)** Prove que se T_1 e T_2 têm vetores cíclicos u_1, u_2, respectivamente, e q_{T_1}, q_{T_2} são relativamente primos (i.e., não têm fatores em comum), então $v = u_1 + u_2$ é um vetor cíclico para T.

   Solução. Temos que $q_{T_1,u_1} = q_{T_1}$ e $q_{T_2,u_2} = q_{T_2}$. Para ver que v é vetor cíclico para T, basta provar que $q_{T,v}$ tem grau $n = \dim \mathsf{V}$. Se $p(T)v = 0$, então, pela invariância de W_1 e W_2, segue que $p(T)u_1 = p(T)u_2 = 0$, e portanto, q_{T_1} e q_{T_2} dividem p. Como estes últimos são relativamente primos, o produto $q_{T_1}q_{T_2}$ divide p; em particular, $q_{T_1}q_{T_2}$ divide $q_{T,v}$. Como u_1 e u_2 são vetores cíclicos para T_1, T_2, segue que q_{T_1} e q_{T_2} tem graus $n_1 = \dim \mathsf{W}_1$, $n_2 = \dim \mathsf{W}_2$, respectivamente. Em particular, $q_{T,v}$ tem grau igual à $n_1 + n_2 = \dim \mathsf{V}$, logo, v é vetor cíclico para T. ∎

Questão 4 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & & & & & & & \\ & 0 & -4 & & & & & & & \\ & 1 & 4 & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 0 & -3 & & & & \\ & & & 0 & 1 & 3 & & & & \\ & & & & & & 0 & -5 & & \\ & & & & & & 1 & 2 & & \\ & & & & & & & & 0 & 6 \\ & & & & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cujos elementos não-indicados são nulos.

1. **(2 pontos)** Determine os polinômios característico, minimal e os divisores elementares de T.

   Solução. A matriz dada é formada por matrizes companheiras ao longo da diagonal. Seu polinômio característico é $p_T(\lambda) = (\lambda-2)^4(\lambda-1)^3(\lambda+3)(\lambda^2-2\lambda+5)$. A parte de T correspondente ao último bloco é diagonalizável com autovalores -3 e 2. O polinômio minimal de T, portanto, é $q_T(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-2)^2(\lambda-1)^3(\lambda^2-2\lambda+5)$. Os divisores elementares de T são $\lambda-2$, $\lambda-2$, $\lambda+3$, $(\lambda-2)^2$, $(\lambda-1)^3$ e $\lambda^2-2\lambda+5$. ∎

2. **(3 pontos)** Determine a forma canônica de Jordan e a forma racional de T.

   Solução. As formas de Jordan e racional de T são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & & & \\ & & -3 & & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & & \\ & & & 1 & 2 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & & & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2 & & & & & & & & & \\ & 0 & -4 & & & & & & & \\ & 1 & 4 & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 0 & -3 & & & & \\ & & & 0 & 1 & 3 & & & & \\ & & & & & & 0 & -5 & & \\ & & & & & & 1 & 2 & & \\ & & & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & & & -3 \end{pmatrix}.$$

∎