UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM053 - Álgebra Linear II (Matemática - Matemática Industrial)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PROVA SUBSTITUTIVA- 22/06/2011

Questão 1 Suponhamos que V seja um espaço munido de produto interno e $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ seja uma base ortonormal de V. Considere o operador $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ cuja matriz em relação à base $\mathscr{B}$ é $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) **(2 pontos)** Encontre a decomposição em valores singulares de T, i.e., encontre bases ortonormais $\{u_1, u_2\}$ e $\{v_1, v_2\}$ de V e números reais $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$ tais que $Tu_j = \sigma_j v_j$ e $T^* v_j = \sigma_j u_j$, para $j = 1, 2$.

Solução. A matriz de T^*T em relação a $\mathscr{B}$ é $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, cujos autovalores são 5 e 0. Portanto, T tem somente um valor singular, a saber $\sigma_1 = \sqrt{5}$. Pondo $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2)$ e $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 - 2e_2)$, temos que $\mathscr{C} = \{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de V tal que $T^*T(u_1) = 5u_1$ e $T^*Tu_2 = 0$. Definindo $v_1 \doteq \frac{1}{\sqrt{5}} T(u_1) = e_1$ e $v_2 = e_2$, temos que $Tu_1 = \sqrt{5} v_1$, $Tu_2 = 0$ e $T^* v_1 = \sqrt{5} u_1$, $T^* v_2 = 0$, como queríamos. ∎

(b) **(2 pontos)** Calcule a matriz de $|T|$ em relação à base $\mathscr{B}$.

Solução. Usando a notação do ítem anterior, temos, por definição, que $|T|u_1 = \sqrt{5}u_1$ e $|T|u_2 = 0$. Como a matriz $M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ de mudança de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{C}$ é $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ e sua inversa é $M_{\mathscr{C}\mathscr{B}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, temos que a matriz de $|T|$ em relação à base $\mathscr{B}$ é

$$M_{\mathscr{B}\mathscr{C}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M_{\mathscr{C}\mathscr{B}} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

∎

Questão 2 Considere em $\mathbb{F}^5$ o subespaço W_1 gerado pelos vetores $u_1 = (1, 0, 1, -1, 2)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1, -3, 5)$, $u_4 = (1, 1, 3, -4, 8)$ e $u_5 = (1, 0, 2, -4, 7)$ e o subespaço W_2 formado pelas soluções do sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

(a) **(1,5 ponto)** Encontre o valores de a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 para os quais W_1 é o conjunto-solução do sistema linear

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + x_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Solução. Escalonando, vemos que os vetores u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes e u_4 e u_5 são combinação linear de u_1, u_2, u_3. Um funcional linear $\varphi(x_1, \dots, x_5) = a_1x_1 + \dots + a_5x_5$ pertence a W_1^o se e só se φ é da forma

$$\varphi(x_1, \dots, x_5) = a_4(-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4) + a_5(3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_5).$$

Em particular, os números procurados são $a_1 = -2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 3$ e $b_1 = 3$, $b_2 = 4$, $b_3 = -5$. ∎

(b) **(1,5 ponto)** Calcule as dimensões de $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2$ e $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$.

Solução. Como o sistema que define W_2 é triangular, a dimensão de W_2 é $5 - 2 = 3$. Evidentemente, $\dim \mathsf{W}_1 = 3$. A intersecção $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2$ é o espaço solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_5 &= 0 \end{cases},$$

o qual, depois de escalonado, nos dá um sistema equivalente na forma triangular

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \end{cases},$$

O espaço solução deste último sistema tem dimensão 1, portanto, $\dim(\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2) = 1$ e $\dim(\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2) = \dim \mathsf{W}_1 + \dim \mathsf{W}_2 - \dim(\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2) = 3 + 3 - 1 = 5$. Em particular, $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2 = \mathbb{F}^5$. ∎

Questão 3 Prove as afirmações a seguir:

(a) **(1,5 ponto)** Se $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ é tal que $T^2 - 6T + 13I = 0$ então existe uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual T tem matriz $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Solução. Como o polinômio $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 13$ tem raízes $3 + 2i$ e $3 - 2i$, segue que este é o polinômio minimal do operador T. Considerando a complexificação $T^{\mathbb{C}}$ de T, temos que $T^{\mathbb{C}}$ é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, i.e., existe $z = u + iv \in \mathbb{C}^2$, $u, v \in \mathbb{R}^2$, tal que $Tz = (3 + 2i)z$ e $T(\bar{z}) = (3 - 2i)\bar{z}$. Tomando partes real e imaginária, concluímos que $\{u, -v\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual T tem matriz $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. ∎

(b) **(1,5 ponto)** Se V é um espaço com produto interno então dado qualquer $T \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ e qualquer base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V, existem $R, R' \in \mathrm{O}(\mathsf{V})$ tais que todo vetor de $\mathscr{B}$ é autovetor de RTR'.

Solução. Pelo teorema da decomposição em valores singulares, existem bases ortonormais $\{u_1, \dots, u_n\}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tais que $Tu_j = \sigma_j v_j$ para $j = 1, \dots, n$. Considere os operadores $R, R' \in \mathscr{L}(\mathsf{V})$ dados por $R'(e_j) = u_j$ e $R(v_j) = e_j$, $j = 1, \dots, n$. Assim,

$$RTR'(e_j) = RT(u_j) = R(\sigma_j v_j) = \sigma_j e_j,$$

para $j = 1, \dots, n$. ∎