

☆ Limites de funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}{-x^3 - 2x^2 + 4x + 8}$                      | 2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x^2 + 3x}$  | 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{2 - \sqrt{x^3 - 4}}$  |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[4]{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}$                                     | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x^4+1} - 1}{x^4}$  | 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[7]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$   |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1}}$                         | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(20x)}{\text{sen}(301x)}$   | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\text{sen}(2x))}{x}$  |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 0} (\text{tg}(3x) \text{cossec}(6x))$                                       | 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$  | 12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$   |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$                                     | 14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(3x^2 - 5x + 2)}{x^2 + x - 2}$   | 15) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x^3 - x^2}$  |
| 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^3(x) \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$          | 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x}$  | 18) $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3} \right)$   |
| 19) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x^3 - 1) \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$ | 20) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$   | 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$   |
| 22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 7x - 3}{2 - x + 5x^2 - 4x^3}$                   | 23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$   | 24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$   |
| 25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x}$                       | 26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^4+1})$   | 27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$   |
| 28) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x - 8}{\sqrt{x^6 + x + 1}}$                          | 29) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+9} + x + 3)$  | 30) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x) \text{sen}(x^2 - 4)}{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{4x}}$                          |
| 31) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x \cos(\sqrt{x})}{x^4 \text{sen}(1/x) + 1}$           | 32) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\text{sen } x + \sqrt{x} \cos x)}{x\sqrt{x} - \text{sen}(x\sqrt{x})}$ | 33) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{7x^{12} + 5x^4 + 7}}{2x^3 + 2}$                                      |
| 34) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$                                  | 35) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 - 5x + 3}}{x^2 - 1}$   | 36) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x + 2x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x - \sqrt{1+x^2}}$ |

2. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $|f(x)| \leq 2|x|$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x}$ .

3. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $1 + x^2 + \frac{x^6}{3} \leq f(x) + 1 \leq \sec x^2 + \frac{x^6}{3}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) \cos\left(\frac{1}{x+x^2}\right) \right).$$

4. Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|\operatorname{sen} x| \leq f(x) \leq 3|x|$  e  $0 \leq g(x) \leq 1 + |\operatorname{sen} x|$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x) + \cos x)$ .

5. Sejam  $c, L \in \mathbb{R}$  tais que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L$ . Determine  $c$  e  $L$ .

6. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a) Assumindo que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x}$ .

(b) Assumindo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

(c) Assumindo que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

7. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \underbrace{\left( \underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}_{\rightarrow 0} - 1 \right)}_{\rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

8. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

(a) Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções tais que  $f$  é limitada positiva e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , então tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty.$$

(b) Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções tais que  $f$  é limitada e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , então tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = +\infty.$$

(c) Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções tais que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = +\infty$ .

9. Dê exemplos de funções  $f$  e  $g$  tais que:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 1$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) \neq 0$ .

10. Mostre que se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  e se  $g$  é limitada então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$ .

### ☆ Continuidade de Funções

11. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função  $f$  é contínua. Justifique.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x^2 - 4) + 5, & \text{se } x > 2 \\ \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}, & \text{se } x < 2 \\ 5, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \frac{1 + (-1)^{[x]}}{2} \text{sen}(\pi x).$$

Obs.: o símbolo  $[x]$  denota o maior inteiro que é menor ou igual a  $x$  e é definido por  $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ .

12. Determine  $L$  para que a função dada seja contínua em  $\mathbb{R}$ .

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 + 2) - \text{sen}(x + 2)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^8 + x^4}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

13. Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Verifique que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ . Pergunta-se:  $f$  é contínua no ponto  $x = 1$ ? Por quê?

14. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

- (a) Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $|f|$  é contínua em  $x = 0$ , então  $f$  é contínua em  $x = 0$ .  
 (b) Se  $f$  e  $g$  são funções descontínuas em  $x = 0$ , então a função  $fg$  é descontínua em  $x = 0$ .

### ☆ Derivadas

15. Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis em um intervalo aberto  $I$ ,  $a \in I$  e

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq a \\ g(x), & \text{se } x < a \end{cases}.$$

Prove que  $h$  é derivável em  $x = a$  se, e somente se,  $f(a) = g(a)$  e  $f'(a) = g'(a)$ .

16. Encontre constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que a função  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$  seja derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(0) = 0$ .

17. Verifique se  $f$  é contínua e derivável no ponto  $x_0$ , sendo:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) } f(x) = \begin{cases} (x^2 + x) \cos \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, & x_0 = 0 \\
 \text{(b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}, & x_0 = 1 \\
 \text{(c) } f(x) = \begin{cases} x^2 + \text{sen } x, & \text{se } x > 0 \\ x^5 + 4x^3, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, & x_0 = 0 \\
 \text{(d) } f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}x^5, & \text{se } x > 1 \\ x^4, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}, & x_0 = 1 \\
 \text{(e) } f(x) = \begin{cases} x \text{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, & x_0 = 0 \\
 \text{(f) } f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, & x_0 = 0 \\
 \text{(g) } f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}, & x_0 = 0 \\
 \text{(h) } f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, & x_0 = 0 \\
 \text{(i) } f(x) = |\text{sen } x|, & x_0 = 0 \\
 \text{(j) } f(x) = |\text{sen}(x^5)|, & x_0 = 0 \\
 \text{(k) } f(x) = \cos(\sqrt{|x|}), & x_0 = 0
 \end{array}$$

18. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}[(3+x)^2] - \text{tg}9}{x}$ .

19. Calcule  $f'(x)$  para as funções  $f$  abaixo:

$$\begin{array}{lll}
 1) f(x) = \frac{x+1}{x-1} & 2) f(x) = \frac{(2x^3+1)^{32}}{x+2} & 3) f(x) = \frac{4x-x^4}{(x^3+2)^{100}} \\
 4) f(x) = x \text{sen}(\sqrt{x^5} - x^2) & 5) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cos x}{(x^4 + \text{tg}^2 x + 1)^2} & 6) f(x) = \sqrt[6]{x \text{tg}^2 x} \\
 7) f(x) = \frac{\sqrt{x} + \text{cosec } x}{x^3 + 3x^2} & 8) f(x) = \sec(\sqrt{x^2 + 1}) & 9) f(x) = \frac{x^2 \text{tg}(x^3 - x^2)}{\sec x} \\
 10) f(x) = x \text{sen } x \cos x & 11) f(x) = \frac{(x+\lambda)^4}{x^4 + \lambda^4} & 12) f(x) = \frac{1}{\text{sen}(x - \text{sen } x)} \\
 13) f(x) = \frac{2x}{(x + \sqrt{x})^{\frac{1}{3}}} & 14) f(x) = \text{cotg}(3x^2 + 5) & 15) f(x) = \frac{x^2}{\text{sen}^{33} x \cos^{17} x} \\
 16) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} \text{sen } x}{x^2 \cos(x^2)} & &
 \end{array}$$

20. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $\mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \leq |x^3 + x^2|$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . A função  $f$  é derivável em 0?

21. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $a \in ]0, +\infty[$ . Calcule, em termos de  $f'(a)$ , o limite:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ .

22. Discuta as seguintes “soluções” para a questão “Considere a função  $f(x) = x|x|$ . Decida se  $f$  é derivável em  $x = 0$  e, em caso afirmativo, calcule  $f'(0)$ . Justifique suas afirmações.”

“Solução 1”:  $f'(0) = 0$ , pois  $f(0) = 0$ .

“Solução 2”: Como a função  $g(x) = |x|$  não é derivável em  $x = 0$ , não é possível usar a regra do produto para derivar  $f$  em  $x = 0$ . Logo  $f$  não é derivável em  $x = 0$ .

“Solução 3”: Temos  $f(x) = h(x)g(x)$ , onde  $h(x) = x$  e  $g(x) = |x|$ . Assim:

$$f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0);$$

como  $g(0) = 0$  e  $h(0) = 0$  então  $f'(0) = 0$ .

“Solução 4”: Temos  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ . Logo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0.$$

Portanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ , ou seja  $f'(0) = 0$ .

23. Em que pontos  $f$  é derivável?

(a)  $f(x) = \sqrt{x^4 + x^6}$                       (b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$ .

24. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $x = 0$  tal que  $f(0) = f'(0) = 0$ . Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e não derivável em  $x = 0$ . Calcule a derivada de  $h(x) = f(x)g(x)$  no ponto  $x = 0$ .

25. Seja  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2} \operatorname{sen}(\sqrt[3]{x})$ .

(a) Calcule  $f'(3)$ .

(b) Calcule  $f'(0)$ .

(c) Seja  $g(x) = \frac{(5 + f(x))(2x + 3 \sec x)}{x + \operatorname{tg} x + 4}$ , onde  $f$  é a função dada acima. Calcule  $g'(0)$ .

26. Mostrar que a reta  $y = -x$  é tangente à curva  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ . Encontre o ponto de tangência.

27. Determine todos os pontos  $(x_0, y_0)$  sobre a curva  $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$  tais que a tangente à curva em  $(x_0, y_0)$  seja paralela à reta  $16x - y + 5 = 0$ .

28. Seja  $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 1}$ . Determine todas as retas tangentes ao gráfico de  $f$  que passam pelo ponto  $(0, 0)$ .

29. Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável até 2ª ordem e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = xf(x + 1 + \operatorname{sen} 2x)$ . Calcule  $g''(x)$ . Supondo  $f'(1) = -2$ , calcule  $g''(0)$ .

30. Seja  $f(x) = |x^3|$ . Calcule  $f''(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . A função  $f''$  é derivável no ponto  $x_0 = 0$ ? Justifique.

31. Sabe-se que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável em  $\mathbb{R}$  e que a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 3 é  $x + 2y = 6$ . Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = (f(\sqrt{9 + 4x}))^2$ . Determine  $g'(0)$ .

32. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) tem como intersecção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

33. Seja  $y = f(x)$  uma função dada implicitamente pela equação  $x^2 = y^3(2 - y)$ . Admitindo  $f$  derivável, determine a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 1)$ .

34. Seja  $y = f(x)$  uma função dada implicitamente pela equação  $x^2 + xy + y^2 = 3$ . Admitindo  $f$  derivável, determine as possíveis retas tangentes ao gráfico de  $f$  que são normais à reta  $x - y + 1 = 0$ .

35. Seja  $f$  derivável num intervalo aberto  $I$  contendo  $x = -1$  e tal que

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 + xf(x) = 2,$$

para todo  $x \in I$ . Encontre  $f(-1)$  e a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(-1, f(-1))$ .

36. Suponha que  $f$  seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa  $f^{-1}$  seja também derivável. Use derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja nulo.

37. Usando o exercício anterior, encontre  $(f^{-1})'(5)$  sabendo que  $f(4) = 5$  e que  $f'(4) = \frac{2}{3}$ .

38. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } f(x) = \cos(\operatorname{arctg} x) & \text{(b) } f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x & \text{(c) } f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2) \\ \text{(d) } f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^3 & \text{(e) } f(x) = \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)} & \text{(f) } f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \\ \text{(g) } f(x) = \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x & \text{(h) } f(x) = x \operatorname{arctg}(x^2 - x) & \text{(i) } f(x) = \operatorname{arcsen} x \end{array}$$

### ☆ Taxas relacionadas

39. (*Expansão Adiabática*) Quando certo gás composto sofre uma expansão adiabática, a sua pressão  $p$  e seu volume  $V$  satisfazem à equação  $pV^{1,3} = k$ , onde  $k$  é uma constante. Mostre que  $-V \frac{dp}{dt} = 1,3 p \frac{dV}{dt}$ .

40. De um petroleiro quebrado vaza um grande volume  $V$  de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petróleo se expande num contorno circular de raio  $r$  e espessura uniforme  $h$ , onde  $r$  cresce e  $h$  de cresce de um modo determinado pela viscosidade e fluatibilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido:  $h = \frac{c}{\sqrt{t}}$ . Mostre que a taxa  $\frac{dr}{dt}$  com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a  $t^{3/4}$ .

41. Num certo instante  $t_0$ , a altura de um triângulo cresce à razão de 1 cm/min e sua área aumenta à razão de 2 cm<sup>2</sup>/min. No instante  $t_0$ , sabendo que sua altura é 10 cm e sua área é 100 cm<sup>2</sup>, qual a taxa de variação da base do triângulo?

42. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de 1,2 m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de 0,081m<sup>3</sup>/min. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?

43. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante  $t_0$ , o seu volume cresce a uma taxa de 10cm<sup>3</sup>/min. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo?

44. Uma lâmpada está no solo a 15m de um edifício. Um homem de 1,8m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a 1,2m/s. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício.

45. Uma tina de água tem 10 m de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de  $0,2 \text{ m}^3/\text{min}$ , quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30 cm de profundidade?
46. Uma câmera de televisão está posicionada a 4.000 pés de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa que possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com uma velocidade de 600 pés/s quando já tiver subido 3.000 pés. Quão rápido está variando a distância da câmera ao foguete nesse momento? Se a câmera de televisão apontar sempre na direção ao foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela nesse mesmo momento?
47. (*Escada deslizando*) Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a 7 pés da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo.
- Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?
  - Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.
  - Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

### ☆ Respostas

- (1) (1)  $-3/4$ ; (2)  $1/5$ ; (3)  $-1/6$ ; (4) 0; (5)  $1/5$ ; (6)  $3/7$ ; (7)  $\sqrt{2}$ ; (8)  $\frac{20}{301}$ ; (9) 2; (10)  $1/2$ ; (11)  $1/6$ ; (12)  $-1$ ; (13)  $-1$ ; (14)  $1/3$ ; (15)  $-\infty$ ; (16) 0; (17) não existe; (18) não existe; (19) 0; (20)  $-\infty$ ; (21)  $+\infty$ ; (22)  $-1/2$ ; (23) 0; (24)  $1/3$ ; (25) 1; (26)  $-\infty$ ; (27) 0; (28)  $-\infty$ ; (29) 3; (30)  $32\sqrt{2}$ ; (31) 3; (32) 0; (33)  $-\sqrt[4]{7}/2$ ; (34)  $1/2$ ; (35) não existe; (36)  $-\infty$ .
- (2) 0; (3) 0; 0; (4) 1; (5)  $c = -1, L = 5/2$ ; (6) (a) 2; (b) 0; (c)  $+\infty$ ; (8) (a) Falsa; (b) Verdadeira; (c) Falsa; (11)(a)  $\mathbb{R}$ ; (b)  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; (c)  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ; (d)  $\mathbb{R}$ ; (12) (a)  $-\cos 2$ ; (b) 1; (13) Não; (14) (a), (b) são falsas; (16)  $a = -3/2, b = 0$  e  $c = 7/2$ ; (17) (a), (c), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k) são contínuas em  $x_0$ ; (f), (g), (j) são deriváveis em  $x_0$ ; (18)  $6 \sec^2 9$ ; (20) Sim; (21)  $2\sqrt{a}f'(a)$ ; (22) Somente (4) está correta; (23) (a) em todos os pontos; (b) em  $x_0 \neq 0$ ; (24) 0; (25) (a)  $\frac{7}{3\sqrt[3]{12}} \sin(\sqrt[3]{3}) + \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \cos(\sqrt[3]{3})$ ; (b)  $-1$ ; (c)  $-\frac{1}{8}$ ;
- (26) (3, -3); (27)  $(-1, -13), y = 16x + 3; (0, 7), y = 16x + 7; (1, 19), y = 16x + 3$ ; (28)  $y = 9x, y = -x$ ; (29)  $-12$ ; (30) Não; (31)  $-1$ ; (33)  $y = x$ ; (34)  $y + x = 2; y + x = -2$ ; (35) 2;  $2x + 7y - 12 = 0$ ; (41)  $-1, 6$ ; (42)  $\frac{1}{40\pi} \text{ m/min}$ ; (43)  $\frac{4}{3} \text{ cm}^2/\text{min}$ ; (44)  $3,6 \text{ m/s}; 0,9 \text{ m/s}$ ; (45)  $\frac{10}{3} \text{ cm/min}$ ; (46)  $360 \text{ pes/s}; 0,096 \text{ rad/s}$ ; (47) (a)  $\frac{7}{12} \text{ pes/s}$ ; (b)  $\frac{527}{24} \text{ pes}^2/\text{s}$ ; (c)  $\frac{1}{12} \text{ rad/s}$ .