UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM095 - Análise I
Prof. José Carlos Eidam

Lista 1

Em toda a lista, $\mathbb{K}$ denota um corpo ordenado qualquer.

✰ Corpos ordenados

1. Verifique as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$:

   ① (Unicidade do inverso aditivo) Se $x + y = 0 = x + z$ então $y = z$.

   ② (Unicidade do inverso multiplicativo) Se x, y, z são não-nulos e $xy = 1 = xz$ então $y = z$.

   ③ (Unicidade do zero) Existe um *único* elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x = 0 + x$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

   ④ (Unicidade da unidade) Existe um *único* elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $1x = x = x1$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

   ⑤ Se $x + y = x + z$ então $y = z$.

   ⑥ Se $x \neq 0$ e $xy = xz$ então $y = z$.

   ⑦ Se $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

2. Dados $x, x', y, y', z \in \mathbb{K}$ quaisquer, prove as afirmações abaixo:

   ① Se $x \in \mathbb{K}$ é não-nulo, então $x^2 > 0$. Em particular, $-1 < 0 < 1$.

   ② Dado qualquer $a \in \mathbb{K}$, $a > 0$, mostre que não existe nenhum $x \in \mathbb{K}$ tal que $x^2 + a = 0$.

   ③ $x < y$ se e só se $x + z < y + z$.

   ④ Se $z > 0$ então $x < y$ se e só se $xz < yz$.

   ⑤ $x > 0$ se e só se $\frac{1}{x} > 0$.

   ⑥ Se $x > 0$, $y < 0$ e $z < 0$ então $xy < 0$ e $xz > 0$.

   ⑦ $x < y$ se e só se $-y < -x$.

   ⑧ Se $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$ então $0 < xx' < yy'$.[1]

   ⑨ Se $0 < x < y$ e $n \in \mathbb{N}$ então $0 < x^n < y^n$.

   ⑩ Se $x, y > 0$ e $x + y = 0$ então $x = y = 0$. Em particular, se $x^2 + y^2 = 0$ então $x = y = 0$.

3. Considere os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ formados pelo números naturais, inteiros e racionais, respectivamente.

   ① Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ definida indutivamente por $f(1) = 1$ e $f(n+1) = f(n)+1$, i.e., $f(n) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{vezes}}$ para $n \geq 1$. Mostre que f é *crescente*, i.e., $m < n$ implica $f(m) < f(n)$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Em particular, f é injetora. Isso nos permite considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$.

[1] Esta afirmação é falsa, em geral, sem a hipótese que todos os números envolvidos são positivos.

② Mostre, por indução, que $f(m+n) = f(m) + f(n)$ e $f(mn) = f(m)f(n)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

③ Definimos $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ por $g(n) = f(n)$ se $n \geq 0$ e $g(n) = -f(-n)$ se $n < 0$. Mostre que g também é crescente e portanto, podemos considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$. Prove uma afirmação análoga à ② para g.

④ Considere $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ dada por $h(p/q) = g(p)/g(q)$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Mostre que g é crescente, e, portanto, podemos considerar também $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

4. Podemos, pelo exercício anterior, considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$.

① Mostre que $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é infinito. Em particular, um corpo ordenado é sempre infinito.

② Prove que nenhum corpo finito pode ser ordenado.

③ Se $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é limitado, então não existe $\sup \mathbb{N}$.

5. Considere $n > 1$ um número inteiro. Dados $k, l \in \mathbb{Z}$, dizemos que $k \equiv l\,(mod\, n)$ se e só se $k - l$ é múltiplo de n.

① Mostre que $\equiv$ define uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. A classe de equivalência de um inteiro k é denotada por $\overline{k}$ e o conjunto de todas as classes de equivalência é denotado por $\mathbb{Z}_n$. Tal conjunto é chamado, às vezes, de *conjunto dos inteiros módulo n*. Evidentemente, $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

② Mostre que $\overline{k} + \overline{l} = \overline{k+l}$ e $\overline{k}\,\overline{l} = \overline{kl}$, para $k, l \in \mathbb{Z}$, definem[2] operações de soma e multiplicação em $\mathbb{Z}_n$. Estas operações são associativas, comutativas, admitem elementos neutros e verificam distributividade.

③ Mostre que $\mathbb{Z}_n$ é um corpo se e só se n é primo.

④ Mostre que se n é primo então $\mathbb{Z}_n$ *não* admite estrutura de corpo ordenado.

6. Dados $a \in \mathbb{K}$ e n um inteiro positivo, definimos indutivamente $a^1 = a$ e $a^n \doteq a^{n-1} \cdot a$. Convencionamos que $a^0 = 1$ se $a \neq 0$. Se $n < 0$ é inteiro e $a \neq 0$, definimos $a^n = (a^{-1})^{-n}$. Verifique as seguintes afirmações para quaisquer inteiros m, n e $a, b \in \mathbb{K}$ não-nulos:

① $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$;

② $a^{mn} = (a^m)^n$;

③ $(ab)^n = a^n b^n$;

④ Se $0 < a < b$ então $0 < a^n < b^n$;

⑤ $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$ (*Fórmula do binômio de Newton*).

7. Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

① Prove a *identidade de Lagrange*:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) - \sum_{1 \leq k < l \leq n} (a_k b_l - a_l b_k)^2.$$

[2] Mostre, inclusive, que estas operações são bem-definidas.

② Prove a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}.$$

Mostre que ocorre a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz se e somente se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $b_j = \alpha a_j$ ou $a_j = \alpha b_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$.

③ Prove a *desigualdade de Minkowski*:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}.$$

8. (Desigualdades de Bernoulli) Dado um inteiro positivo n, mostre, por indução, as seguintes desigualdades em $\mathbb{K}$:

① Se $x > -1$ então $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

② Se $x \neq 0$ então $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$.

③ Se $a > 0$ e $a + x > 0$ então $(a+x)^n \geq a^n + na^{n-1}x$.

9. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

① $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado.

② Dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

③ Dados $\varepsilon > 0$ e $A > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\varepsilon > A$. (Princípio de Arquimedes)

④ Dados $a > 1$ e $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^N > A$.

⑤ Dados $0 < a < 1$ e $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^N < \varepsilon$.

Um corpo ordenado satisfazendo qualquer uma das afirmações acima é dito *arquimediano*.

10. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado arquimediano. Prove as seguintes afirmações:

① Dados $x < y$ em $\mathbb{K}$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

② Se existe $\xi \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{Q}$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r\xi < y$. Em particular, existe $\eta \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < \eta < y$.

③ Existem infinitos r's satisfazendo ① e ②.

11. Considere o conjunto $\mathbb{Q}(x)$ dos quocientes da forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e $q \neq 0$ são polinômios com coeficientes racionais. Nestas circunstâncias, dizemos que $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p'(x)}{q'(x)}$ se e só se $p(x)q'(x) = p'(x)q(x)$. Podemos definir operações de soma e produto pelas fórmulas

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x)q'(x) + p'(x)q(x)}{q(x)q'(x)}$$

e $\frac{p(x)}{q(x)} \frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x)p'(x)}{q(x)q'(x)}$.

① Mostre que as operações definidas acima são bem-definidas e tornam $\mathbb{Q}(x)$ um corpo.

② Dizemos que $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ se os coeficientes dos termos de maior grau de p e q tiverem o mesmo sinal. Mostre que esta definição torna $\mathbb{Q}(t)$ um corpo ordenado.

③ Mostre que para qualquer inteiro positivo n tem-se $n < x$ (Aqui x denota o polinômio $p(x) = x$). Em particular, $\mathbb{Q}(x)$ *não* é arquimediano.

12. Mostre que qualquer intervalo em um corpo ordenado é infinito.

13. Dados $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $|a - b| < \varepsilon$, mostre que $|b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon$ e $a < |b| + \varepsilon$.

14. Mostre que $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, para todos $x, y \in \mathbb{K}$.

☆ Supremo e ínfimo

15. Seja $X \subset \mathbb{K}$ não-vazio.

① Mostre que, caso existam, $\sup X$ e $\inf X$ são únicos e $\inf X \leq \sup X$.

② Admitindo que exista $\max X$, mostre que existe $\sup X$ e $\max X = \sup X$. Prove um resultado análogo para min e inf em lugar de max e sup.

③ Encontre uma situação em que existe $\sup X \in \mathbb{K}$ mas não existe $\max X$.

④ Encontre uma situação na qual não exista nem $\max X$ nem $\sup X$.

⑤ Mostre que se $a \in X$ é uma cota superior (inferior) de X então $a = \sup X$ ($a = \inf X$).

⑥ Se X é limitado superiormente então $\sup X = \inf\{c \in \mathbb{K} : \ c \text{ é cota superior de } X\}$. Caso X seja limitado inferiormente, tem-se $\inf X = \sup\{c \in \mathbb{K} : \ c \text{ é cota inferior de } X\}$.

16. Seja $X \subset \mathbb{K}$ não-vazio e $a \in \mathbb{K}$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

① $\inf X = a$

② $a \leq x$ para todo $x \in X$ e dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

Prove uma equivalência análoga para sup em lugar de inf.

17. Se $X \subset \mathbb{K}$ é um não-vazio ilimitado superiormente (inferiormente), dizemos que $\sup X = \infty$ ($\inf X = -\infty$).

① Mostre que $\sup X = \infty$ se e só para qualquer $A \in \mathbb{K}$ existe $x \in X$ tal que $x > A$.

② Mostre que $\inf X = -\infty$ se e só para qualquer $A \in \mathbb{K}$ existe $x \in X$ tal que $x < A$.

Convenciona-se que $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$, $\pm\infty + a = \pm\infty$, $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ se $a > 0$, $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ se $a < 0$ e $-\infty < a < \infty$ para qualquer $a \in \mathbb{K}$.

18. Sejam $X, Y \subset \mathbb{K}$ não-vazios que admitem supremo e ínfimo e $c \in \mathbb{K}$. Considere os conjuntos $X + Y \doteq \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$, $cX \doteq \{cx : x \in X\}$ e $X \cdot Y \doteq \{xy : x \in X,\ y \in Y\}$.

① Mostre que $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ e $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

② Mostre que $\sup(cX) = c \sup X$ e $\inf(cX) = c \inf X$ se $c > 0$. O que ocorre se $c < 0$?

③ Mostre que $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$ e $\inf(X \cup Y) = \min\{\sup X, \sup Y\}$.

④ Mostre que se X, Y contém somente elementos positivos, então $\sup(X \cdot Y) = (\sup X)(\sup Y)$ e $\inf(X \cdot Y) = (\inf X)(\inf Y)$.

⑤ Pondo $-X = (-1)X$, mostre que $\sup(-X) = -\inf X$ e $\inf(-X) = -\sup X$.

19. Sejam $X \subset Y \subset \mathbb{K}$ conjuntos limitados não-vazios que admitem sup e inf.

① Prove que $\inf Y \leq \inf X$ e $\sup X \leq \sup Y$.

② Suponha que dado qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $y \leq x$. Mostre que $\sup X = \sup Y$.

③ Suponha que dado qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $x \leq y$. Mostre que $\inf X = \inf Y$.

20. Sejam $X \subset Y \subset \mathbb{K}$ conjuntos não-vazios que admitem sup e inf. Assuma que para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, tem-se $x \leq y$.

① Prove que $\sup X \leq \inf Y$.

② Prove que $\sup X = \inf Y$ se e só se dado $\varepsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$.

21. Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo (em $\mathbb{Q}$) dos seguintes conjuntos:

① $\{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

② $\{\frac{n}{1+n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

③ $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2x + 2 < 0\}$

④ $\{\frac{2n-1}{3n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

⑤ $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 7\}$

22. Mostre, por indução, que qualquer conjunto finito X possui supremo e ínfimo, os quais coincidem com os elementos máximo e mínimo de X, respectivamente.

✰ O corpo dos números reais

23. Mostre que as seguintes afirmações a respeito de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ são equivalentes:

① Todo subconjunto não-vazio limitado superiormente (inferiormente) de $\mathbb{K}$ tem supremo (ínfimo).

② Se $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ é uma sequência de intervalos fechados então $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \emptyset$.

Um corpo ordenado é dito *completo* se qualquer uma das afirmações acima é verificada em $\mathbb{K}$.

24. Mostre que o conjunto $X = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ não tem supremo em $\mathbb{Q}$. Conclua que $\mathbb{Q}$ *não* é completo. Encontre outros conjuntos que não possuem supremo ou ínfimo em $\mathbb{Q}$.

25. Mostre que um corpo ordenado completo deve ser arquimediano e não-enumerável.

26. Um subconjunto X de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é chamado de *intervalo* se dados $x, y \in X$ com $x < y$ e $z \in \mathbb{K}$ tal que $x < z < y$ tem-se que $z \in X$. Mostre que se $X, Y \subset \mathbb{K}$ são intervalos então $X + Y$ e cX são intervalos, para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

27. Um *corte de Dedekind*, ou simplesmente, um *corte* é um subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{Q}$ tal que:

⚹ $A \neq \mathbb{Q}$;

⚹ Se $x \in A$ e $y < x$ então $y \in A$.

⚹ A não tem elemento máximo.

Prove as seguintes afirmações:

① Mostre que se A é um corte, então A é um intervalo.

② Mostre que se A, B são cortes então $A + B$ é um corte (conforme a definição dada no exercício (19)). Denotando por 0 o corte $(-\infty, 0)$, mostre que $A + 0 = 0 + A = A$ para qualquer corte A. Mostre que o conjunto dos cortes é um grupo abeliano munido da operação de soma e que o inverso aditivo de A é o corte

$$A' = \{x \in \mathbb{Q} : -x \in \mathbb{Q} \setminus A \text{ e } -x \text{ não é menor elemento de } \mathbb{Q} \setminus A\}.$$

③ Dizemos que A é *positivo*, fato este denotado por $A > 0$, se $A \not\subset (-\infty, 0)$. Caso $A \neq 0$ não seja positivo, dizemos que A é *negativo* e escrevemos $A < 0$. Se A, B são cortes positivos, mostre que

$$A \cdot B = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x = a \cdot b, \text{ com } a \in A,\ b \in B \text{ e } a, b \geq 0\}$$

é um corte positivo.

④ Estenda a definição de produto dada no ítem anterior para cortes arbitrários e mostre que o conjunto dos cortes munido desta operação de produto e da soma definida anteriormente é um corpo. Identifique os inversos multiplicativos e a unidade da multiplicação. Este corpo é chamado de corpo dos números reais e denotado pela letra $\mathbb{R}$.

⑤ Mostre que o conjunto dos cortes positivos é fechado por soma e multiplicação e satisfaz a condição de tricotomia[3]. Em particular, podemos introduzir em $\mathbb{R}$ uma ordem que o torna um corpo ordenado.

⑥ Mostre que qualquer subconjunto não-vazio limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo. (Dica: Se X é um conjunto limitado superiormente de cortes, então $\sup X = \bigcup_{A \in X} A$.) Conclua que $\mathbb{R}$ é completo.

⑦ Dado $r \in \mathbb{Q}$, podemos considerar o corte $C_r = (-\infty, r)$. Mostre que a aplicação $\mathbb{Q} \ni r \mapsto C_r \in \mathbb{R}$ é um homomorfismo crescente de corpos ordenados. Isso nos permite considerar $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

⑧ Seguindo o roteiro abaixo, mostre que dado qualquer corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ existe um *isomorfismo* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, i.e., um homomorfismo crescente bijetor. Assim, podemos dizer, num sentido bastante estrito, que $\mathbb{R}$ é o *único* corpo ordenado completo.

  ⚹ Construa um homomorfismo crescente $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

  ⚹ Estenda f a $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ pondo $\tilde{f}(a) = \sup_{x<a,\, x\in\mathbb{Q}} f(x) = \inf_{y>a,\, x\in\mathbb{Q}} f(y)$. Mostre que $\tilde{f}$ é bem-definida.

  ⚹ Mostre que $\tilde{f}$ é um homomorfismo crescente de grupos.

  ⚹ Conclua que $\tilde{f}$ é sobrejetora. (A imagem de $\tilde{f}$ é um intervalo contendo o conjunto ilimitado $\tilde{f}(\mathbb{Z})$.)

28. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos $\sup f \doteq \sup f(X)$ e $\inf f \doteq \inf f(X)$; f é dita *limitada* se $-\infty < \inf f \leq \sup f < \infty$.

[3] Isso significa que, para qualquer corte A, ou $A > 0$, ou $A = 0$ ou $A < 0$.

(a) Mostre que $\inf f + \inf g \leq \inf(f+g) \leq \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$.

(b) Mostre que $(\inf f)(\inf g) \leq \inf(f \cdot g) \leq \sup(f \cdot g) \leq (\sup f)(\sup g)$.

(c) Encontre situações em que as desigualdades acima são estritas.

29. Neste exercício, mostraremos a existência de raízes n-ésimas em $\mathbb{R}$. Para tanto, fixemos $a > 0$ e n um inteiro positivo.

① Mostre que o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^n < a\}$ é limitado.

② Dado $x \in X$, encontre $C > 0$ dependendo de n e x tal que $(x+\varepsilon)^n < x^n + C\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$.

③ Mostre que X não tem elemento máximo.

④ Use o exercício (8) para mostrar que se $y^n > a$ e $0 < \varepsilon < y$, então $(y-\varepsilon)^n > y^n - ny^{n-1}\varepsilon$. Conclua que o conjunto $Y = \{y \in \mathbb{R} : y > 0 \text{ e } y^n > a\}$ não tem elemento mínimo.

⑤ Seja $b = \sup X$. Mostre que b é o único número real positivo tal que $b^n = a$. b é chamado de *raiz n-ésima* de a e denotado por $\sqrt[n]{a}$.

⑥ Mostre que se n é *ímpar* e $a \in \mathbb{R}$ é qualquer, então existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. b é único em $\mathbb{R}$ se $a < 0$.

⑦ Mostre que a função $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é uma bijeção crescente. Mostre que $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

30. Mostre que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ para quaisquer $x, y > 0$.

31. Mostre que se $m, n > 1$ são inteiros tais que $m \neq k^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $\sqrt[n]{m}$ é irracional.

32. Sejam m, n inteiros positivos tais que $\sqrt{m}, \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Mostre que $\sqrt{m} \pm \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

33. Mostre que $\sqrt{2}\sqrt[3]{17}\sqrt[5]{8}$ é irracional.

34. Assinale V ou F:

① O produto de dois números irracionais é sempre irracional.

② A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

③ A soma de dois números irracionais positivos é sempre irracional.

35. Dados $k > 1$ inteiro e $x > 0$, seja a_1 o maior inteiro menor ou igual a x. Supondo definidos $a_1, \ldots, a_n$, definimos a_{n+1} como o maior inteiro com a propriedade que

$$a_1 + \frac{a_2}{k^2} + \ldots + \frac{a_n}{k^n} + \frac{a_{n+1}}{k^{n+1}} \leq x.$$

① Mostre que $0 \leq a_n < k$, para todo $n > 0$.

② Explique geometricamente como obter os números $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

③ Mostre que

$$0 \leq x - \left(a_1 + \frac{a_2}{k^2} + \ldots + \frac{a_n}{k^n}\right) < \frac{1}{k^n},$$

para todo $n > 0$. Conclua que $x = \sup\{a_1 + \frac{a_2}{k^2} + \ldots + \frac{a_n}{k^n} : n \in \mathbb{N}\}$. A sequência de inteiros $(a_0 a_1 a_2 \ldots)$ é chamada de *expansão de x na base k*.

36. Neste exercício, descreveremos a potenciação com expoentes fracionários e reais. Dados $a > 0$ e m, n inteiros positivos, definimos $a^{1/n} \doteq \sqrt[n]{a}$ e $a^{m/n} \doteq \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

   (a) Se $r = m/n \in \mathbb{Q}$ com $m, n > 0$ inteiros, podemos definir $a^r \doteq a^{m/n}$. Mostre que esta é uma boa definição, i.e., independe da representação de r. Estenda esta definição para $r < 0$.
   (b) Mostre que $a^{r+s} = a^r a^s$ e $a^{r+s} = a^r a^s$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$.
   (c) Mostre que $(ab)^r = a^r b^r$ para quaisquer $b > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.
   (d) Prove que $1 < a < b$ se e só se $a^r < b^r$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.
   (e) Admitindo que $a > 1$, prove que $r < s$ se e só se $a^r < a^s$.
   (f) Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, definimos

   $$a^x \doteq \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

   A função $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ é chamada de *exponencial de base a*. Mostre que a função exponencial de base a estende a função $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r \in \mathbb{R}$ definida anteriormente e tem as mesmas propriedades que esta.
   (g) Mostre que a exponencial de base a é uma função $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ crescente positiva e sobrejetora. Sendo assim, admite uma inversa, chamada de *logaritmo na base a* e denotada por $(0, \infty) \ni x \mapsto \log_a x \in \mathbb{R}$. Estude as propriedades do logaritmo na base a análogas àquelas da função exponencial. Mostre que $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma bijeção crescente.

37. Um subconjunto $G \subset \mathbb{R}$ chama-se *subgrupo aditivo* se for fechado em relação à operação de soma. Seja $G_+ = G \cap (0, \infty)$, e assumamos que $G \neq \emptyset$.

   ① Se $\inf G_+ = 0$, mostre que G é denso em $\mathbb{R}$.
   ② Se $\inf G_+ = a > 0$, mostre que $G = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$.
   ③ Mostre que para qualquer $\alpha \notin \mathbb{Q}$, o conjunto formado pelos números da forma $m + n\alpha$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$.

38. Prove as afirmações a seguir:

   ① O intervalo $[0, 1]$ é não-enumerável.
   ② O intervalo $(0, 1)$ é não-enumerável.
   ③ $\mathbb{R}$ é não-enumerável.
   ④ Qualquer um dos intervalos $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) e $[a, b]$, com $a < b$, é não-enumerável.
   ⑤ O complemento de qualquer conjunto enumerável é denso.
   ⑥ O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ formado pelos números irracionais é não-enumerável.

39. Mostre que $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ dada por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma bijeção e calcule sua inversa. Use f para construir uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e um intervalo (a, b) qualquer, com $a < b$.