UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM095 - Análise I
Prof. José Carlos Eidam

Lista 2

✰ Sequências de números reais

1. Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$ para cada sequência $\{x_n\}$ a seguir, justificando suas respostas:

(1) $x_n = \frac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$	(2) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$	(3) $x_n = \sqrt[n]{n^4+2011n^3-5}$
(4) $x_n = \frac{n!}{n^n}$	(5) $x_n = \frac{5^n}{3^n+5^n+7^n}$	(6) $x_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$
(7) $x_n = \sqrt[n]{n!}$	(8) $x_n = \frac{n+\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[7]{17n-8}}$	(9) $x_n = \frac{3n^3-n^2+11n}{n^4-2n^3}$
(10) $x_n = \left(\frac{5n+7}{3n+8}\right)^{2n-4}$	(11) $x_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$	(12) $x_n = \frac{n!}{n^n}$
(13) $x_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$	(14) $x_n = n(\sqrt{n^2+1}-n)$	(15) $x_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

2. Prove as afirmações abaixo a respeito de um par de sequências $\{x_n\}, \{y_n\}$ de números reais:

   ① $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se e só se $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ para qualquer subsequência $\{x_{n_k}\}_k$.

   ② Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = c$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = c - a$.

   ③ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \neq 0$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{a}{c}$.

   ④ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = c$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{c}{a}$.

   ⑤ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ é fixado, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$. Se k é ímpar, mostre que o resultado vale também para $a > 0$.

   ⑥ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$ é fixado, então $\lim_{n\to\infty} {x_n}^r = a^r$.

   ⑦ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ se e só se $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

   ⑧ Se $\lim_{n\to\infty} x_n > a$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > a$ para todo $n \geq N$.

   ⑨ Se existem $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} y_n$ e $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$ então $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.

   ⑩ Se $\{x_n\}$ é limitada e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

3. (Exercício (9) da lista (1) revisitado) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes em um corpo ordenado $\mathbb{K}$:

   ① $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado;

   ② $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

   ③ Se $0 < a < 1$ então $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$;

   ④ Se $a > 1$ então $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$;

4. Mostre que se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência que converge para a então a sequência converge para a.

5. Mostre que se uma sequência monótona tem uma subsequência que converge para a então a sequência converge para a.

6. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n \geq 1$.

   ① Mostre que $x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   ② Mostre que $\{x_n\}$ é crescente.

   ③ Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

7. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$, $n \geq 1$.

   ① Mostre que $\{x_n\}$ é limitada .

   ② Mostre que $\{x_n\}$ é crescente.

   ③ Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

8. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. Mostre que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

9. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada e considere os números

$$a \doteq \sup\left\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de aderência de } \{x_n\}\right\},$$

   $b \doteq \lim_{n\to\infty} b_n$, onde $b_n \doteq \sup\{x_j : j \geq n\}$ e $c \doteq \inf\{x \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n > x\} \text{ é finito}\}$.

   Mostre que os números a, b, c são bem definidos e $a = b = c$. Este valor comum é chamado de $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Prove uma afirmação análoga para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

10. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais.

   ① Se $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$ então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

   ② Se $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$ então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

   ③ Se $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$ então nada se pode afirmar, em geral.

11. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências limitadas. Verifique as seguintes afirmações:

   ① $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$;

   ② $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$;

   ③ $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$;

   ④ $\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n)$, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo n suficientemente grande;

   ⑤ $\liminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \geq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n)$, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo n suficientemente grande.

   ⑥ Encontre situações nas quais as desigualdades acima são estritas.

⑦ Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$, então $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n$ e $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n$.

12. Dada uma sequência $\{x_n\}$, um termo x_k chama-se *termo destacado de* $\{x_n\}$ se $x_k \geq x_n$ para todo $n \geq k$ e consideremos o conjunto $K = \{k \in \mathbb{N} : x_k \text{ é um termo destacado}\} = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$.

   ① Se K é infinito, mostre que a subequência $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é não-crescente.

   ② Se K é finito, mostre que $\{x_n\}$ possui uma subsequência crescente.

   ③ Conclua que qualquer sequência limitada possui uma subsequência monótona.

   ④ Prove, a partir das afirmações acima, que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

13. Neste problema vamos dar outra prova do fato que toda sequência limitada de números reais tem subsequência convergente. Para isso, seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada de números reais.

   ① Seja $M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq x_n \text{ para uma infinidade de } n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\alpha = \sup X$ existe e $\alpha \leq M$.

   ② Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma infinidade de $n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$.

   ③ Conclua que α é valor de aderência de $\{x_n\}$; em particular, existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = a$.

14. Neste problema, vamos usar o método da *caça ao leão* para provar o resultado já provado no exercício anterior. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada.

   ① Não há perda de generalidade em supor que $0 \leq x_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   ② Escreva $J_0 = [0,1]$ como reunião $I_1 \cup I_2$ de dois intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{2}$. Mostre que para algum destes dois intervalos I é verdade que $\{j \in \mathbb{N} : x_j \in I\}$ é infinito. Chame tal intervalo de J_1.

   ③ Prosseguindo indutivamente, obtemos intervalos fechados $[0,1] \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots J_k \supset \ldots$ de comprimento $\frac{1}{2^k}$, tais que $\{j \in \mathbb{N} : x_j \in J_k\}$ é infinito, para todo $k \in \mathbb{N}$.

   ④ Mostre que existe um único ponto $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$, o qual é limite de uma subsequência de $\{x_n\}$.

15. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes a respeito de uma sequência $\{x_n\}$ de números reais:

   (a) Existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a$;

   (b) $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = a$.

16. Neste exercício, vamos estudar as sequências $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

   ① Mostre por indução que $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$ e conclua que existe $b = \lim_{n\to\infty} y_n$ e $2 \leq b \leq 3$.

② Use o binômio de Newton para provar que

$$\begin{aligned}
x_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Conclua que $\{x_n\}$ é uma sequência crescente e $x_n < y_n$ para cada $n \geq 1$. Em particular, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Observe que $a \leq b$.

③ Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $b - \varepsilon < y_N = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!}$. Logo, para qualquer $n \geq N$,

$$x_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right) + \ldots + \frac{1}{N!}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{N}\right).$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, mostre que $a \geq b$, portanto, $a = b$. Este número é denotado por e.

17. Uma argumentação semelhante àquela feita no exercício anterior pode ser feita com as sequências $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ e $y_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, onde $x > 0$ é um número real fixado. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} y_n$ existem e são iguais.

18. Sejam $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $x_n y_n \to 1$ e conclua que $x_n \to \frac{1}{e}$.

19. Mostre que $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

20. Dado $a > 0$, considere a sequência $x_n = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$.

① Se $a > 1$, mostre que $\{x_n\}$ é decrescente; caso $0 < a < 1$, mostre que $\{x_n\}$ é crescente.

② Mostre que $\{x_n\}$ é limitada.

③ Usando o fato que $x_{2n}^2 = x_n$, calcule o valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$.

21. Considere a sequência $y_n = \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

① Mostre que $\{y_n\}$ é limitada e decrescente.

② Considerando a sequência $x_n = \sqrt[n]{2}$, $n \in \mathbb{N}$, analisada no exercício anterior, mostre que $y_{2n}^2 = x_{2n}^2 y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcule o valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$.

22. Seja $\{x_n\}$ uma sequência para a qual existe um número $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

23. Seja $a > 0$ e considere a sequência $\{x_n\}$ definida por $x_1 = c > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. A constante c é escolhida arbitrariamente.

① Mostre que para todo $x > 0$, $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$.

② Pelo ítem anterior, $x_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$, portanto, $\frac{a}{2x_n x_{n+1}} < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

③ Mostre que $|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

④ Use o exercício anterior para mostrar que existe $\lim_{n\to\infty} x_n$. Calcule este valor.

24. Neste exercício, vamos definir a função exponencial e o logaritmo natural.

① Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos
$$e^x \doteq \sup\{e^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}.$$
Mostre que esta definição faz sentido e que se $x < y$ então $e^x < e^y$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. A função $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0,\infty)$ é chamada de *função exponencial* (de base e).

② Mostre que se $\{r_n\}$ é uma sequência crescente de racionais tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ então $\lim_{n\to\infty} e^{r_n} = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Use este fato para mostrar que $e^{x+y} = e^x e^y$ e $e^{rx} = (e^x)^r$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$.

③ Mostre que $\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$.

④ Usando o teorema do valor intermediário (que será visto em breve), concluímos que a função exponencial é sobrejetora, logo, admite uma inversa, a qual é denotada por $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. A função log é chamada de *logaritmo natural* e também denotada, às vezes, por ln.

⑤ Mostre que $\log 1 = 0$, $\log(xy) = \log x + \log y$ e $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$ para todos $x, y > 0$.

⑥ Mostre que $\log(x^r) = r \log x$, para todos $x > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

⑦ Mostre que $x < y$ implica $\log x < \log y$.

⑧ Mostre que $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$.

⑨ Use o binômio de Newton para mostrar que dados quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{N}$, temos
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^k} = +\infty.$$
Em particular, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $A > 0$ tal que $An^k \leq e^{\alpha n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

⑩ Mostre que dado qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, existe $C > 0$ tal que $\log n \leq Cn^r$. Em particular, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^r} = 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

25. Vamos usar o exercício anterior para definir potências com expoentes reais quaisquer.

Para passarmos a uma base qualquer $a > 0$, observamos que $a = e^{\log a}$, o que nos incentiva a *definir* a *função exponencial na base a* por
$$a^x \doteq e^{x \log a},$$
para qualquer $x \in \mathbb{R}$. A função exponencial na base a tem propriedades bastante semelhantes às da função exponencial natural. Mostre que:

① $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ e $(a^x)^y = a^{xy}$ para $x, y \in \mathbb{R}$;

② A aplicação $x \mapsto a^x$ é uma bijeção crescente entre $\mathbb{R}$ e $(0,\infty)$ se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;

③ A inversa da função exponencial na base a é chamada de *logaritmo na base a*, denotada por $\log_a$. Assim, $a^x = y$ se e só se $\log_a y = x$, para quaisquer $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\log_a 1 = 0$, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ e $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$ para todos $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

④ Mostre que $\log_a(x^y) = y \log_a x$ para todos $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

⑤ Mostre que $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.