UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM095 - Análise I
Prof. José Carlos Eidam

Lista 3

☆ Séries de números reais

1. Verifique se as séries abaixo convergem, justificando suas respostas:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)^3}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$, $p>0$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+7}{9n-1}\right)^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n!$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2}-n)$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$ (11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\,\sqrt[5]{n^3+7}}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p e^n}$, $p>0$ (15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$, $p>0$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p}$, $p>0$

2. (Critério de comparação no limite) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries de números reais e

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|y_n|} \in [0,+\infty].$$

① Se $0<\alpha<+\infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge absolutamente.

② Se $\alpha=0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge absolutamente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente.

③ Se $\alpha=+\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ diverge.

④ Use este resultado para analisar as séries abaixo:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[8]{n^7+3n^3-2}}{\sqrt[6]{n^9+7n^2}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\log n)^p}$, $p>0$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{e^{-an}}$, $a,p>0$

3. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{1+x_n^2}$ também convergem absolutamente.

4. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série de termos positivos. Mostre que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Em particular, se existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ então também existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ e ambos são iguais.

5. Use o exercício anterior para calcular:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!^2}}$

6. Suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

   ① Mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = a$.

   ② Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = a$. Conclua, em particular, que se existe o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ então existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

7. (Critério de condensação de Cauchy) Seja $\{x_n\}$ uma sequência monótona decrescente de números positivos. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ o é.

8. Use o exercício anterior para analisar as séries abaixo:

   ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$

   ② $\sum_{n=1}^{\infty} n^p (\log n)^q$, $p, q \in \mathbb{R}$

   ③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n}$

9. Neste exercício, estudaremos o crescimento das somas parciais da série harmônica. Pressuporemos conhecimento elementar da integral de Riemann.

   ① Do cálculo I, sabemos que $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, para qualquer $x > 0$. Interpretando a integral como área abaixo do gráfico, mostre que

   $$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n,$$

   para todo $n \geq 2$.

   ② Mostre que $\log 10 < \frac{12}{5}$ e conclua que para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

   $$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10^m} \leq 1 + \frac{12m}{5}.$$

   Isso mostra que, embora a série harmônica seja divergente, suas somas parciais crescem muito lentamente. (Por exemplo, $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10^{1000}} \leq 2401$.)

   ③ Considere a sequência $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$, $n \geq 1$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência decrescente limitada inferiormente. O número

   $$\gamma \doteq \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

   é chamado de *constante de Euler-Mascheroni.*

10. Se p é um polinômio de grau 1 então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p(n)}$ converge.

11. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ uma série divergente de termos positivos e $x_n > 0$ tais que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ para todo n suficientemente grande. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ também é divergente.

12. Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, seja $x_n^+ = \max\{x_n, 0\}$ e $x_n^- = \max\{-x_n, 0\}$, $n \in \mathbb{N}$. As séries $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ são chamadas de parte positiva e parte negativa da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

① Mostre que $x_n^+ \geq 0$, $x_n^- \geq 0$ e $x_n = x_n^+ - x_n^-$ e $|x_n| = x_n^+ + x_n^-$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

② Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é condicionalmente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não pode ser absolutamente convergente.

④ Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ o são e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$.

13. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries de números reais.

① Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge e $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ converge.

② Encontre um exemplo em que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge mas $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n}$ diverge.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ convergem então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge absolutamente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2}.$$

④ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ convergem então $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ converge e

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2}.$$

14. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série e $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função bijetora.

① Encontre uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ e uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} y_{\varphi(n)}$ não seja convergente.

② Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sup\left\{\sum_{n=1}^{N} x_n \,:\, N \in \mathbb{N}\right\}$.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ o é e $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

15. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de números positivos e definamos $p_n = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$, $n \geq 1$. Quando a sequência $\{p_n\}$ for converge para um número diferente de zero, dizemos que o *produto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente*, e o valor de $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ é, por definição, $\lim_{n\to\infty} p_n$.

① Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)$ são divergentes.

② Mostre que se $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge então $x_n \to 0$.

③ Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$ converge.

④ (Critério de Cauchy para produtos infinitos) Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para um número $\neq 0$ se e só se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $k > 0$ tem-se

$$|u_N u_{N+1} \cdot \ldots \cdot u_{N+k} - 1| < \varepsilon.$$

⑤ Use a desigualdade $1 + x \leq e^x$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$, para mostrar que se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm x_n)$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

⑥ Verifique se os produtos infinitos abaixo são convergentes:

i. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$

ii. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n^5+7n^2}{2^{n^2}}\right)$

iii. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

iv. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^7+n^6-n+4}{n^7+3n^2-1}\right)$

v. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{2n^2+1}\right)$

⑦ Mostre (ou, pelo menos, convença-se!) que para qualquer $s>1$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}},$$

onde $2=p_1<3=p_2<5=p_3<\ldots$ denota a sequência dos inteiros primos. (Dica: Faça $P_m=\Pi_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-s}}$ e escreva cada fator $\frac{1}{1-p_k^{-s}}$ como soma de uma série geométrica. Mostre que $0\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-P_m\le\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ para todo $m\in\mathbb{N}$.)

16. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ séries de números reais. O *produto de Cauchy* de $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ é a série $\sum_{n=0}^{\infty}z_n$ cujo termo geral é $z_n\doteq\sum_{j=0}^{n}x_jy_{n-j}$, para cada $n\ge 0$.

① Mostre que o produto de Cauchy da série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ por si mesma é uma série divergente.[1]

② Mostre que se $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ são *absolutamente convergentes* então o seu produto de Cauchy é convergente.

17. Sejam $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ uma série *absolutamente* convergente e $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ uma série convergente. Neste exercício, vamos provar o resultado originalmente devido a F. Mertens que diz que o produto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty}z_n$ de $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ por $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ é convergente.

① Sejam $A_n=\sum_{j=0}^{n}x_j$, $B_n=\sum_{j=0}^{n}y_j$ e $C_n=\sum_{j=0}^{n}z_j$, $n\ge 0$. Mostre que

$$C_n=\sum_{j=0}^{n}B_jx_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}(B_j-B)x_{n-j}+BA_n$$

para cada $n\ge 0$.

② Usando a expressão acima e o fato que $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ converge absolutamente, mostre que $\{C_n\}$ converge para AB.

18. Verifique se as séries abaixo convergem absolutamente, condicionalmente ou divergem:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)^p}$, $p>0$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n^p}$, $p>0$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n!e^{-n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\log n)^p}$, $p>0$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot 4\cdot\ldots(2n)}{3\cdot 5\cdot(2n+1)}$

☆ Topologia da reta

19. Sejam $X,Y\subset\mathbb{R}$ conjuntos abertos. Mostre que

[1] Dica: Mostre que o termo geral z_n da série produto é uma soma de $n+1$ parcelas que excedem, em módulo, $1/n+1$. Em particular, $|z_n|\ge 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

① $X \cap Y$ e $X \cup Y$ são abertos;

② $X + Y$ é aberto;

③ $X \cdot Y$ é aberto;

④ $\mathrm{Int}\,(X \cap Y) = \int X \cap \int Y$ e $\mathrm{Int}\,(X \cup Y) \supset \mathrm{Int}\, X \cup \int Y$;

20. Prove os ítens (1), (2) e (3) do exercício anterior substituindo a palavra *abertos* por *fechados*. O ítem (4) é verdadeiro se substituirmos *interior* por *fecho*?

21. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes a respeito de um subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$:

① X é limitado;

② Todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação em $\mathbb{R}$.

③ Toda sequência em X possui subsequência convergente.

22. Se X é limitado superiormente, mostre que $\sup X$ é o maior ponto de acumulação de X. Analogamente para o ínfimo.

23. Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$.

24. O *comprimento* de um intervalo limitado I é definido por $\ell(I) = \sup I - \inf I$. Caso I seja ilimitado, escrevemos $\ell(I) = \infty$.

① Mostre que $\ell(I \cup J) \leq \ell(I) + \ell(J)$, podendo ocorrer a desigualdade estrita.

② Se $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de intervalos, tais que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tais que $I \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_{\lambda_j}$ e $\ell(I) \leq \sum_{j=1}^{n} \ell(I_{\lambda_j})$.

25. Mostre que a intersecção de uma família qualquer de compactos é compacta e a reunião de uma família finita de compactos é compacta.

✰ Limites e continuidade

26. Mostre que as funções abaixo são contínuas em seu domínio:

① $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n > 1$, $x > 0$;

② $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polinômios em $\mathbb{R}$, com q não-identicamente nulo;

③ $f(x) = e^x$;

④ $f(x) = \log x$;

⑤ $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, para $a > 0$, $a \neq 1$

27. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

① Mostre que sempre existem os limites laterais $\lim_{x \to a^\pm} f(x)$ para qualquer $a \in I$.

② Mostre que o conjunto de pontos de descontinuidade de f é um subconjunto *enumerável* de I.