UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM095 - Análise I
Prof. José Carlos Eidam

Lista 4

INSTRUÇÕES

☞ Esta lista, de entrega facultativa, tem três partes e seus exercícios versam sobre séries, funções contínuas e funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

☞ A nota obtida nesta lista será somada à menor de suas 3 notas.

☞ A pontuação máxima que poderá ser obtida nesta lista é de **6 (seis)** pontos.

☞ A lista deve ser feita *individualmente*, embora isto não signifique que você não possa discutir os exercícios com seus colegas. **Não** hesitarei em desconsiderar "cópias".

☞ A lista deve ser entregue, impreterivelmente, até **21/12/2011**, no horário da quarta prova. Caso você tenha de fazer a prova final, poderá entregar os demais exercícios que desejar na data da prova final, **13/01/2012**, as 9h30 na sala PA02.

➘ ➘

GRUPO 1

1. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada e considere os números

$$a \doteq \sup\left\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de aderência de } \{x_n\}\right\},$$

$b \doteq \lim_{n\to\infty} b_n$, onde $b_n \doteq \sup\{x_j : j \geq n\}$ e $c \doteq \inf\{x \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n > x\} \text{ é finito}\}$.

Mostre que os números a, b, c são bem definidos e $a = b = c$. Este valor comum é chamado de $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Prove uma afirmação análoga para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

2. Dada uma sequência $\{x_n\}$, um termo x_k chama-se *termo destacado de* $\{x_n\}$ se $x_k \geq x_n$ para todo $n \geq k$ e consideremos o conjunto $K = \{k \in \mathbb{N} : x_k \text{ é um termo destacado}\} = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$.

① Se K é infinito, mostre que a subequência $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é não-crescente.

② Se K é finito, mostre que $\{x_n\}$ possui uma subsequência crescente.

③ Conclua que qualquer sequência limitada possui uma subsequência monótona.

④ Prove, a partir das afirmações acima, que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

3. Neste problema vamos dar outra prova do fato que toda sequência limitada de números reais tem subsequência convergente. Para isso, seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada de números reais.

① Seja $M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq x_n \text{ para uma infinidade de } n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\alpha \doteq \sup X$ é finito e $\alpha \leq M$.

② Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma infinidade de $n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$.

③ Conclua que α é valor de aderência de $\{x_n\}$; em particular, existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = a$.

4. (Critério de condensação de Cauchy) Seja $\{x_n\}$ uma sequência monótona decrescente de números positivos. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ o é. Use este critério para analisar a convergência das séries abaixo:

   ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$

   ② $\sum_{n=1}^{\infty} n^p (\log n)^q$, $p, q \in \mathbb{R}$

   ③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n}$

5. **(Critério de Raabe)** Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números não-nulos e

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right), \ \beta = \liminf_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right).$$

   Mostre que se $\beta > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente e se $\alpha < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não é absolutamente convergente.

6. Analise a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)},$$

   onde a, b são números positivos.

7. Neste exercício, estudaremos o crescimento das somas parciais da série harmônica. Pressupomos conhecimento elementar da integral de Riemann.

   ① Do cálculo I, sabemos que $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, para qualquer $x > 0$. Interpretando a integral como área abaixo do gráfico, mostre que

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n,$$

   para todo $n \geq 2$.

   ② Mostre que $\log 10 < \frac{12}{5}$ e conclua que para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10^m} \leq 1 + \frac{12m}{5}.$$

   Isso mostra que, embora a série harmônica seja divergente, suas somas parciais crescem muito lentamente. (Por exemplo, $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10^{1000}} \leq 2401$.)

   ③ Considere a sequência $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$, $n \geq 1$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência decrescente limitada inferiormente. O número

$$\gamma \doteq \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

   é chamado de *constante de Euler-Mascheroni*.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:

   ① f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$;

   ② Existem $A, c > 0$ tais que $|f(x)| > |x| + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \geq A$.

   Mostre que a função $g(x) = \sqrt{|x + f(x)|}$ também é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

9. Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua não-identicamente nula tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, para todos $x, y > 0$. Mostre que existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a(x)$, para todo $x > 0$.

10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas.

    ① Mostre que $f \pm g$ é uniformemente contínua.

    ② Mostre que $f \vee g = \max\{f, g\}$ e $f \wedge g = \min\{f, g\}$ são uniformemente contínuas.

    ③ Assumindo que f e g são limitadas, mostre que fg é uniformemente contínua.

    ④ Encontre funções f, g uniformemente contínuas tais que fg não é uniformemente contínua.

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = +\infty$. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

12. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Mostre que existem $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

13. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$ existem $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ tais que, se $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ para algum i, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

14. Uma função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita uma *função escada* se existem $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ tais que a restrição de g a cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) é constante. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então, dado $\varepsilon > 0$, mostre que existe uma função escada $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$.

15. Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Mostre que dada uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ de K, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in K$ e $|x - y| < \delta$, então existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x, y \in U_\lambda$. O número δ é chamado de *número de Lebesgue* da cobertura.

16. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função crescente contínua. Mostre que $f(I)$ é um intervalo e que a função inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ é contínua.

17. Mostre que as seguintes afirmações a respeito de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são equivalentes:

    ① $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim_{x \to -\infty} |f(x)| = +\infty$.

    ② Se $\{x_n\}$ é uma sequência tal que $|x_n| \to +\infty$, então $|f(x_n)| \to +\infty$.

    ③ Se K é compacto então $f(K)$ é compacto.

    Uma função satisfazendo qualquer uma das relações acima é chamada de *própria*. Mostre que se f é uma bijeção própria então f^{-1} é contínua.

18. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciável e $a < c < d < b$ tais que $f'(c) = f'(d) = 0$. Mostre que existe no máximo um $x \in (x, d)$ tal que $f(x) = 0$.

19. Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diferenciável.

① Se $\lim_{x\to a^+} f'(x)=+\infty$ então $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$.

② Se $\sup_{a<x<b}|f'(x)|<\infty$ então f é uniformemente contínua e existem $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

GRUPO 2

20. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série e $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma função bijetora.

① Encontre uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ e uma bijeção $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} y_{\varphi(n)}$ não seja convergente.

② Se $x_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\sup\left\{\sum_{n=1}^{N} x_n : N\in\mathbb{N}\right\}$.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ o é e $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

21. Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ uma série *absolutamente* convergente e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ uma série convergente. Neste exercício, vamos provar o resultado originalmente devido a F. Mertens que diz que o produto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ por $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ é convergente.

① Sejam $A_n=\sum_{j=0}^{n} x_j$, $B_n=\sum_{j=0}^{n} y_j$ e $C_n=\sum_{j=0}^{n} z_j$, $n\geq 0$. Mostre que

$$C_n=\sum_{j=0}^{n} B_j x_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}(B_j-B)x_{n-j}+BA_n$$

para cada $n\geq 0$.

② Usando a expressão acima e o fato que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge absolutamente, mostre que $\{C_n\}$ converge para AB.

22. Seja $\{x_n\}$ uma sequência crescente de números positivos tal que $x_n\to\infty$. O *expoente de conergência* de $\{x_n\}$ é definido por

$$\sigma\doteq\inf\left\{\alpha\in\mathbb{R}:\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{-\alpha}<\infty\right\}.$$

Mostre que $\sigma=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log x_n}$.

23. Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, seja $x_n^+=\max\{x_n,0\}$ e $x_n^-=\max\{-x_n,0\}$, $n\in\mathbb{N}$. As séries $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ são chamadas de parte positiva e parte negativa da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

① Mostre que $x_n^+\geq 0$, $x_n^-\geq 0$ e $x_n=x_n^+-x_n^-$ e $|x_n|=x_n^++x_n^-$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

② Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é condicionalmente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+=\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-=+\infty$.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+=\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-=+\infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não pode ser absolutamente convergente.

④ Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ o são e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$.

24. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries de números reais.

① Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge e $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ converge.

② Encontre um exemplo em que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge mas $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n}$ diverge.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ convergem então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge absolutamente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2}.$$

④ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ convergem então $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ converge e

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2}.$$

25. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries de números reais. O *produto de Cauchy* de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ é a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ cujo termo geral é $z_n \doteq \sum_{j=0}^{n} x_j y_{n-j}$, para cada $n \geq 0$.

① Mostre que o produto de Cauchy da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ por si mesma é uma série divergente. (Dica: Mostre que o termo geral z_n da série produto é uma soma de $n+1$ parcelas que excedem, em módulo, $1/n+1$.)

② Mostre que se $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ são *absolutamente convergentes* então o seu produto de Cauchy é convergente.

26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$. Mostre que:

① $\lim_{x\to+\infty}\{f(x+c) - f(x)\} = cL$;

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.

27. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que

$$\sup_{x\in I} |f'(x)| = \sup_{x,y\in I,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}.$$

Se algum dos números acima é finito, mostre que f é uniformemente contínua. Mostre que a recíproca deste fato é falsa, exibindo uma função uniformemente contínua para a qual os supremos acima são infinitos.

28. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável com $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$. Mostre que existe $c > 0$ tal que a função $g(x) = x + cf(x)$ é bijetora e tem inversa diferenciável.

29. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Para cada $x \in I$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definamos $M(x;\varepsilon) \doteq \sup\big\{|f(y) - f(z)| :\ y,z \in I \text{ e } |y-x| < \varepsilon, |z-x| < \varepsilon\big\}$. Evidentemente, para cada x fixado, a função $M(x;\varepsilon)$ é uma função crescente em ε, logo, podemos definir a *oscilação de f em x* por

$$\omega(x) \doteq \inf_{\varepsilon>0} M(x;\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} M(x;\varepsilon).$$

Mostre que f é contínua em x se e só se $\omega(x) = 0$.

GRUPO 3

30. Neste exercício, vamos definir a função exponencial e o logaritmo natural. Você pode assumir os resultados demonstrados nos exercícios 16 - 19 da lista 2.

    ① Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos
    $$e^x \doteq \sup\{e^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}.$$
    Mostre que esta definição faz sentido e que se $x < y$ então $e^x < e^y$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. A função $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty)$ é chamada de *função exponencial* (de base e).

    ② Mostre que se $\{r_n\}$ é uma sequência crescente de racionais tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ então $\lim_{n\to\infty} e^{r_n} = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Use este fato para mostrar que $e^{x+y} = e^x e^y$ e $e^{rx} = (e^x)^r$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$.

    ③ Mostre que $\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$.

    ④ Usando o teorema do valor intermediário (que será visto em breve), concluímos que a função exponencial é sobrejetora, logo, admite uma inversa, a qual é denotada por $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. A função log é chamada de *logaritmo natural* e também denotada, às vezes, por ln.

    ⑤ Mostre que $\log 1 = 0$, $\log(xy) = \log x + \log y$ e $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$ para todos $x, y > 0$.

    ⑥ Mostre que $\log(x^r) = r \log x$, para todos $x > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

    ⑦ Mostre que $x < y$ implica $\log x < \log y$.

    ⑧ Mostre que $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$.

    ⑨ Use o binômio de Newton para mostrar que dados quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{N}$, temos
    $$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^k} = +\infty.$$
    Em particular, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $A > 0$ tal que $An^k \leq e^{\alpha n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

    ⑩ Mostre que dado qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, existe $C > 0$ tal que $\log n \leq Cn^r$. Em particular, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^r} = 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

31. Vamos usar o exercício anterior para definir potências com expoentes reais quaisquer.

    Para passarmos a uma base qualquer $a > 0$, observamos que $a = e^{\log a}$, o que nos incentiva a *definir* a *função exponencial na base a* por
    $$a^x \doteq e^{x \log a},$$
    para qualquer $x \in \mathbb{R}$. A função exponencial na base a tem propriedades bastante semelhantes às da função exponencial natural. Mostre que:

    ① $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ e $(a^x)^y = a^{xy}$ para $x, y \in \mathbb{R}$;

    ② A aplicação $x \mapsto a^x$ é uma bijeção crescente entre $\mathbb{R}$ e $(0, \infty)$ se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;

    ③ A inversa da função exponencial na base a é chamada de *logaritmo na base a*, denotada por $\log_a$. Assim, $a^x = y$ se e só se $\log_a y = x$, para quaisquer $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\log_a 1 = 0$, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ e $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$ para todos $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

④ Mostre que $\log_a(x^y) = y\log_a x$ para todos $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

⑤ Mostre que $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

32. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de números positivos e definamos $p_n = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$, $n \geq 1$. Quando a sequência $\{p_n\}$ for converge para um número diferente de zero, dizemos que o *produto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente*, e o valor de $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ é, por definição, $\lim_{n\to\infty} p_n$.

① Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)$ são divergentes.

② Mostre que se $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge então $x_n \to 0$.

③ Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$ converge.

④ (Critério de Cauchy para produtos infinitos) Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para um número $\neq 0$ se e só se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $k > 0$ tem-se

$$|u_N u_{N+1} \cdot \ldots \cdot u_{N+k} - 1| < \varepsilon.$$

⑤ Use a desigualdade $1 + x \leq e^x$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$, para mostrar que se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm x_n)$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

⑥ Verifique se os produtos infinitos abaixo são convergentes:

i. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$

ii. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{n^5+7n^2}{2^{n^2}}\right)$

iii. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

iv. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^7+n^6-n+4}{n^7+3n^2-1}\right)$

v. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{2n^2+1}\right)$

⑦ Mostre que para qualquer $s > 1$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}},$$

onde $2 = p_1 < 3 = p_2 < 5 = p_3 < \ldots$ denota a sequência dos inteiros primos. (Dica: Faça $P_m = \Pi_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$ e escreva cada fator $\frac{1}{1-p_k^{-s}}$ como soma de uma série geométrica. Mostre que $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - P_m \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.)

33. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita *semicontínua superiormente* no ponto $a \in X$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(a) + \varepsilon$ para todo $x \in (a, a+\delta) \cap X$. f é dita semicontínua superiormente se o for em cada ponto de X. Vamos abreviar a expressão *semicontínua superiormente* por *scs.*

① Mostre que a soma de duas funções scs é scs e o produto de uma função scs por um número não-negativo é scs.

② Mostre que o produto de duas funções scs não-negativas é scs.

③ A *função característica de* $A \subset \mathbb{R}$ é definida como $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Mostre que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se e só se χ_A é scs.

④ Dados $a \in X$ e $\varepsilon > 0$, definimos $N(a;\varepsilon) = \sup\{f(y) : y \in X \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$. Como a função $N(a;\varepsilon)$ é crescente em ε para cada $a \in X$ fixado, podemos definir

$$\limsup_{x \to a} f(x) \doteq \inf_{\varepsilon > 0} N(a;\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} N(a;\varepsilon).$$

Mostre que f é scs no ponto a se e só se $\limsup_{x \to a} f(x) \le f(a)$.

⑤ Mostre que se X é compacto então toda função scs assume seu valor máximo em X.

⑥ Defina semicontinuidade inferior e prove resultados análogos aos anteriores neste caso. Mostre que f é contínua em a se e só se é semicontínua superiormente e inferiormente em a.

34. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *convexa* se dados $x < y$ em I e $0 \le t \le 1$, tem-se $f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y)$. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes a respeito de uma função de classe C^2:

① f é convexa.

② Dados $x_1, \ldots, x_n \in I$ e $0 \le t_1, \ldots, t_n \le 1$ tais que $\sum_{j=1}^n t_j = 1$, temos $f\left(\sum_{j=1}^n t_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^n t_j f(x_j)$.

③ $f''(x) \ge 0$ para todo $x \in I$.

Use esta caracterização de funções convexas para provar as seguintes desigualdades:

① **(Desigualdade de Young)** Se $a, b, \alpha, \beta \ge 0$ e $\alpha + \beta = 1$ então $a^\alpha b^\beta \le \alpha a + \beta b$.

② **(Desigualdade de Hölder)** Se p, q são positivos e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $|xy| \le \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

③ **(Desigualdade de Hölder)** Se $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ e $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \le \left\{\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

④ **(Desigualdade de Minkowski)** Se $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ então

$$\left\{\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$