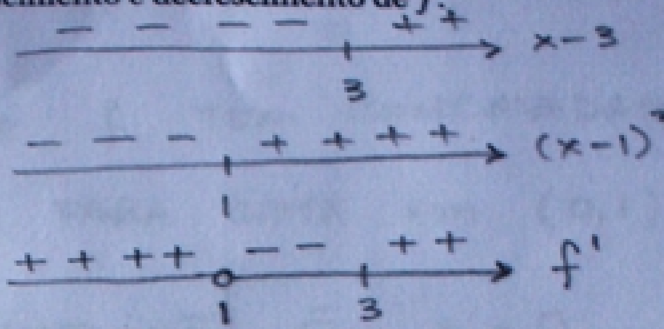
Questão 1 Seja $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}, x \neq 1$.

1. **(1 ponto)** Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

$$f'(x) = \frac{(x-3)x^2}{(x-1)^3}$$



$\therefore$ f É CRESCENTE EM $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ E DECRESCENTE EM $(1,3)$.

2. **(1 ponto)** Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

$\underline{x_0 = 3}$: MÍNIMO LOCAL

$\underline{x_1 = 0}$: INFLEXÃO (VEJA O ÍTEM (3))

3. **(1 ponto)** Determine a concavidade do gráfico de f e os pontos de inflexão.

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \quad \therefore$$

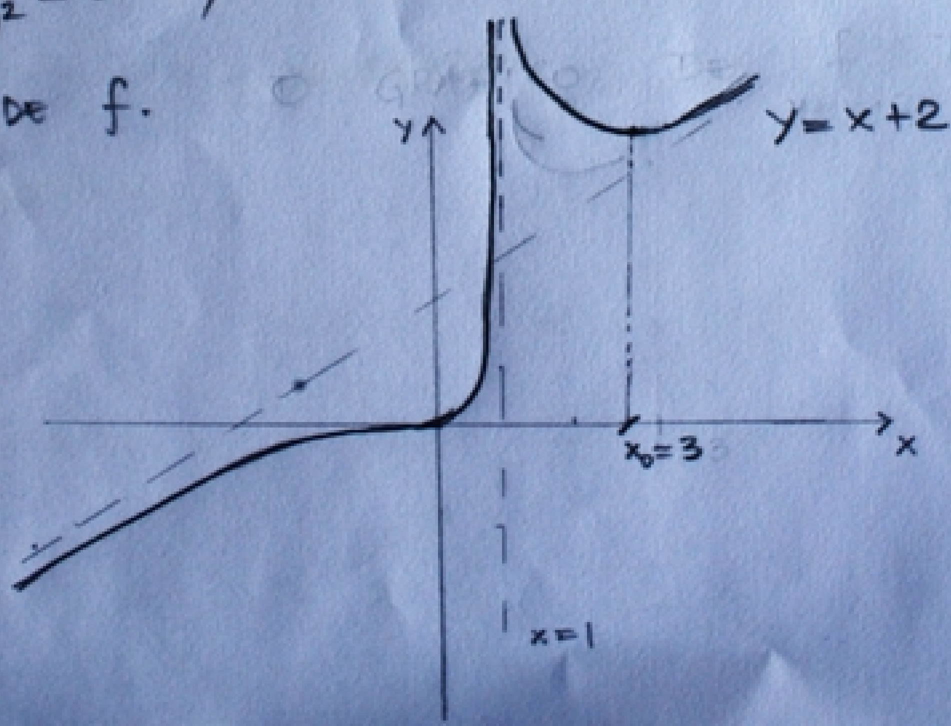
$$\begin{array}{ccccc} - - - - & & + + & & + \\ \hline & 0 & & 1 & \end{array} \; f''$$

LOGO, O GRÁFICO DE f TEM CONCAVIDADE P/ BAIXO EM $(-\infty, 0)$ E PARA CIMA EM $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

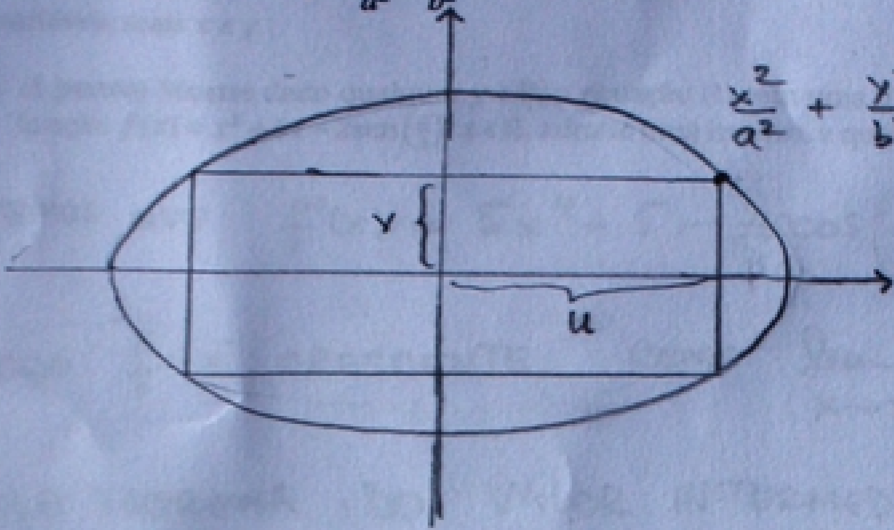
O ÚNICO PONTO DE INFLEXÃO É $x_1 = 0$.

4. **(1 ponto)** Determine as assíntotas e esboce o gráfico de f.

COMO $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, A RETA $x=1$ É ASSÍNTOTA VERTICAL. COMO $\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x}{(x-1)^2}$ E $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{(x-1)^2} = 0$, A RETA $y = x+2$ É ASSÍNTOTA P/ O GRÁFICO DE f.



Questão 2 (1 ponto) Encontre a área do maior retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados que pode ser inscrito na elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



O RETÂNGULO DE ÁREA MÁXIMA É TAL QUE O PRODUTO uv É MÁXIMO. COMO $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$, ENTÃO

$$uv = ub\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}} = \frac{b}{a}u\sqrt{a^2-u^2} \doteq f(u), \quad 0 \leq u \leq a$$

DERIVANDO f, TEMOS $f'(u)=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2-2u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}$, ASSIM, O ÚNICO PONTO CRÍTICO DE f É $u_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$, O QUAL É PONTO DE MÁXIMO LOCAL PARA f. COMO $f(0)=f(a)=0$, SEGUE QUE u_0 É MÁXIMO GLOBAL PARA f. ASSIM, A ÁREA DO MAIOR RETÂNGULO QUE PODE SER INSCRITO NA ELIPSE É

$$4u_0v_0 = 4\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2ab.$$

Questão 3 Considere a equação

$$x^5+5x-2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)=y \tag{1}$$

nas variáveis reais x e y.

(a) **(1 ponto)** Mostre dado qualquer $y \in \mathbb{R}$, a equação (1) tem uma única solução $x \in \mathbb{R}$, ou seja, a função $f(x)=x^5+5x-2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, admite uma inversa, a qual chamamos de g.

TEMOS QUE $f'(x) = 5x^4 + 5 - \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) \geq 0 + 5 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$,

LOGO f É CRESCENTE. COMO $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, SEGUE,

PELO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO, QUE f É

BIJETORA. EM PARTICULAR, DADO $y \in \mathbb{R}$, A EQUAÇÃO (1) TEM UMA ÚNICA SOLUÇÃO $x \in \mathbb{R}$.

(b) **(1,5 ponto)** Mostre que $|g(y)-g(z)| \leq \frac{3}{13}|y-z|$, para todos $y, z \in \mathbb{R}$ e calcule $g'(0)$.

TEMOS QUE $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \leq \frac{1}{13/3} = \frac{3}{13}$, LOGO,

PELO TEOREMA DO VALOR MÉDIO, $|g(y)-g(z)| \leq \frac{3}{13}|y-z|$,

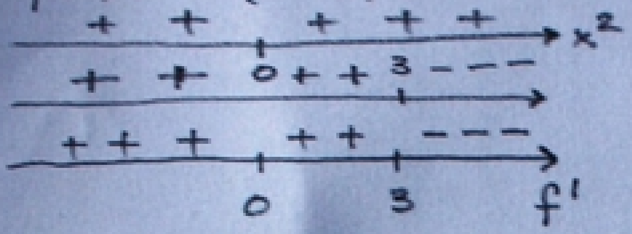
$y, z \in \mathbb{R}$. TEMOS QUE $f(0)=0$, LOGO, $g(0)=0$, PORTANTO,

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5-2/3} = \frac{3}{13}.$$

Questão 4 Seja $f(x) = x^3e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. **(1 ponto)** Determine os pontos de máximo e mínimo globais e os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[-1, 5]$.

$f'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$ $\therefore$ $x_0 = 0$ E $x_1 = 3$ SÃO PONTOS CRÍTICOS.



x_1 É MÁXIMO LOCAL.

TEMOS $f(-1) = -e$, $f(5) = 5^3e^{-5}$, $f(x_1) = 3^3e^{-3}$.

COMO $f'<0$ EM $(3,\infty)$, TEMOS $f(x_1) > f(5)$ $\therefore$ $x_1 = 3$ É MÁX. GLOBAL E $x_2 = -1$ É MÍNIMO GLOBAL. OS VALORES MÁXIMO E MÍNIMO DE f SÃO, RESPECTIVAMENTE,

$3^3e^{-3} = 27/e^3$ E $-e$.

(b) **(1,5 ponto)** Determine a menor constante $C > 0$ tal que $x^3 \leq Ce^x$ para *todo* $x \geq 0$.

$x^3 \leq Ce^x \iff x^3e^{-x} \leq C$, $x \geq 0$.

COMO $27/e^3$ É O VALOR MÁXIMO DE $f(x) = x^3e^{-x}$ EM $(0, +\infty)$, TEMOS QUE A CONSTANTE PROCURADA É $C = \frac{27}{e^3}$.