UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
MA22 - Fundamentos de Cálculo - PROFMAT
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PRIMEIRA AVALIAÇÃO - 12/05/2012

Questão 1 Calcule, se existir, o limite de cada uma das sequências abaixo (cada ítem vale **1 ponto**):

(a) $x_n = \dfrac{1+2^n+5^n}{2^n+3^n+4^n}$

Solução. Temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^n+5^n}{2^n+3^n+4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/4)^n+(2/4)^n+(5/4)^n}{(2/4)^n+(3/4)^n+1} = +\infty,$$

pois o numerador tem limite $+\infty$ e o denominador tem limite 1. ∎

(b) $x_n = \left(\dfrac{1+(-1)^{n^2}}{\sqrt{n}}\right)\operatorname{sen}(n!+8n-3)$

Solução. Temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+(-1)^{n^2}}{\sqrt{n}}\right)\operatorname{sen}(n!+8n-3) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\{(1+(-1)^{n^2})\operatorname{sen}(n!+8n-3)\}}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0} = 0.$$

∎

(c) (Para os corajosos!) $x_n = \sqrt{4n^3+\sqrt{n^3}} - 2\sqrt[4]{n^6+1}$

Solução. Pondo $u = n^3$, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^3+\sqrt{n^3}} - 2\sqrt[4]{n^6+1} &= \lim_{u\to+\infty} \left(\sqrt{4u+\sqrt{u}} - 2\sqrt[4]{u^2+1}\right) \frac{\sqrt{4u+\sqrt{u}}+2\sqrt[4]{u^2+1}}{\sqrt{4u+\sqrt{u}}+2\sqrt[4]{u^2+1}} \\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{4u+\sqrt{u}-4\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{4u+\sqrt{u}}+2\sqrt[4]{u^2+1}} \\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{(4u+\sqrt{u})-4\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{4u+\sqrt{u}}+2\sqrt[4]{u^2+1}} \frac{(4u+\sqrt{u})+4\sqrt{u^2+1}}{(4u+\sqrt{u})+4\sqrt{u^2+1}} \\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{(4u+\sqrt{u})^2-16(u^2+1)}{(\sqrt{4u+\sqrt{u}}+2\sqrt[4]{u^2+1})(4u+\sqrt{u}+4\sqrt{u^2+1})} \\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{8u\sqrt{u}+u}{(\sqrt{4u+\sqrt{u}}+2\sqrt[4]{u^2+1})(4u+\sqrt{u}+4\sqrt{u^2+1})} \\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{8+1/\sqrt{u}}{(\sqrt{4+1/\sqrt{u}}+2\sqrt[4]{1+1/u^2})(4+1/\sqrt{u}+4\sqrt{1+1/u^2})} \\
&= \frac{8}{(4+2)(4+4)} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

∎

Questão 2 Calcule, se existirem, os seguintes limites (cada ítem vale **1 ponto**):

(a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{1-\cos(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)^2}{\text{sen}^2(x^2-1)}\cdot(1+\cos(x^2-1)) = \lim_{x\to 1}\dfrac{1+\cos(x^2-1)}{\left(\frac{\text{sen}(x^2-1)}{x^2-1}\right)^2} = \dfrac{1+1}{1} = 2$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\cos(5x^2)+3x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{8x-\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\cos(5x^2)}{\sqrt{x}}+3x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{8-\sqrt{1+1/x^2}} = \dfrac{3}{8-1} = \dfrac{3}{7}$

(c)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^8+\sqrt{9x^8+1}}-x^4 &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^8+\sqrt{9x^8+1}}-x^4\right)\frac{\sqrt{x^8+\sqrt{9x^8+1}}+x^4}{\sqrt{x^8+\sqrt{9x^8+1}}+x^4}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^8+1}}{\sqrt{x^8+\sqrt{9x^8+1}}+x^4}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9+1/x^8}}{\sqrt{1+\sqrt{9/x^8+1/x^{16}}}+1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Questão 3 **(2 pontos)** Determine o conjunto dos pontos nos quais a função

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}} & , \text{ se } x>1 \\ 0 & , \text{ se } x\le 1 \end{cases}
$$

é diferenciável.

Solução. Como f é um quociente de composições e somas de funções diferenciáveis em $(1,+\infty)$, então f é diferenciável em $(1,+\infty)$. Obviamente, f é diferenciável em $(-\infty,1)$. Vejamos o que ocorre em $x=1$. Temos que

$$
\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2\sqrt{x}-\sqrt{x}}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)\sqrt{x}}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty,
$$

logo, f não é diferenciável em $x=1$. Assim, f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. ∎

Questão 4 Considere a função

$$
f(x) = \frac{\cos x+\sqrt{x+16}}{1+x^4}.
$$

(a) **(1 ponto)** Determine $f'(x)$.

Solução. Temos que

$$f'(x) = \frac{(1+x^4)\left(-\operatorname{sen} x + \frac{1}{2\sqrt{x+16}}\right) - (\cos x + \sqrt{x+16})(4x^3)}{(1+x^4)^2}.$$

∎

(b) **(2 pontos)** Determine a reta tangente ao gráfico de

$$g(x) = \tan^3(f(x)-5) + \frac{3}{1+f(x)}$$

no ponto $(0, g(0))$. Use o resultado obtido para calcular um valor aproximado para $g(0,04)$.

Solução. Temos que $f(0) = 5$, $g(0) = 1/2$ e $g'(0) = -1/96$. Logo, a reta tangente ao gráfico de g em $(0, g(0))$ é

$$\frac{y - 1/2}{x - 0} = -\frac{1}{96},$$

ou, equivalentemente, $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{96}$. Um valor aproximado para $g(0,04)$ é $\frac{1}{2} - \frac{0{,}04}{96} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2400} = \frac{1199}{2400} \approx 0,4995$.

∎