UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
MA22 - Fundamentos de Cálculo - PROFMAT
Prof. Dr. José Carlos Eidam

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS (PARA A PRIMEIRA AVALIAÇÃO)

Questão 1 Calcule os limites das sequências abaixo:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\text{sen}(2n!-7)}{n+3\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{\text{sen}(2n!-7)}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+3} = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n+5^n+7^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3/7)^n}{(2/7)^n+(5/7)^n+1} = 0$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^4+3n^2+7}-\sqrt{n^4-1} &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+3n^2+7}-\sqrt{n^4-1})\frac{\sqrt{n^4+3n^2+7}+\sqrt{n^4-1}}{\sqrt{n^4+3n^2+7}+\sqrt{n^4-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+7}{\sqrt{n^4+3n^2+7}+\sqrt{n^4-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3+7/n^2}{\sqrt{1+3/n^2+7/n^4}+\sqrt{1-1/n^4}} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Questão 2 Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\text{sen}(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\text{sen}(x^2-1)}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\text{sen}(x^2-1)}\dfrac{x}{(x+1)(x+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{4}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x+\sqrt[3]{x}\text{sen}(2x^2)+2012}{3x+x\sqrt{x}\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\text{sen}(2x^2)+\frac{2012}{x}}{3+\frac{\text{sen}(1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

(c)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^6+3x^3+1}-x^3 &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^6+3x^3+1}-x^3)\frac{\sqrt{x^6+3x^3+1}+x^3}{\sqrt{x^6+3x^3+1}+x^3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+1}{\sqrt{x^6+3x^3+1}+x^3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x^3}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Questão 3 Determine o conjunto dos pontos nos quais a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^2)}{\sqrt{x^6+x^8}} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável.

Solução. A função f é diferenciável em qualquer ponto distinto de $x = 0$, pois é quociente de composições de funções diferenciáveis. Vejamos em $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{1-\cos(x^2)}{x\sqrt{x^6(1+x^2)}} \\
&= \frac{1-\cos(x^2)}{x|x^3|\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}\frac{x^3}{|x|^3}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

A primeira parcela do produto acima tem limite $1/2$ (basta multiplicar numerador e denominador por $1+\cos(x^2)$; fizemos isto em aula) e a última parcela tem limite 1. A expressão acima tem limite $1/2$ quando $x \to 0^+$ e $-1/2$ quando $x \to 0^-$. Logo, não existe $f'(0)$. Portanto, f é diferenciável em $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. ∎

Questão 4 Considere a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+4}}{1+x^2}.$$

(a) Determine $f'(x)$.

Solução.

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\left(\cos(\operatorname{tg}(x^2))\sec^2(x^2)\cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right) + \left(\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+4}\right)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

∎

(b) Determine a reta tangente ao gráfico de

$$g(x) = \operatorname{sen}^2(f(x)-2) + 4f(x)^2$$

no ponto $(0, g(0))$.

Solução. Substituindo $x = 0$ na expressão acima, temos $f'(0) = 1/4$. Além disso,

$$g'(x) = 2\operatorname{sen}(f(x)-2)\cos(f(x)-2)f'(x) + 8f(x)f'(x),$$

logo, como $f(0) = 2$, temos $g'(0) = 8\cdot 2\cdot(1/4) = 4$. Como $g(0) = 16$, a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(0, g(0))$ é

$$y - 16 = 4(x-0).$$

∎