Logaritmos e exponenciais

Prof. José Carlos Eidam

6 de agosto de 2010

Nestas notas vamos definir logaritmos e exponenciais usando ferramentas do cálculo. Vamos assumir conhecida a seguinte versão do teorema fundamental do cálculo:

> *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é diferenciável e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

1 Definições

Comecemos com o *logaritmo natural*. Definimos

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \tag{1.1}$$

para todo $x > 0$. Evidentemente, $\ln 1 = 0$ e $(\ln x)' = 1/x$, $x > 0$. Logo, ln é uma função crescente em $(0, \infty)$.

Mostremos que $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, para todos $x, y > 0$. De fato,

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \ln x + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$

Fazendo a mudança de variável $t = xs$, $0 \le s \le y$, na última integral acima, temos

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{ds}{s} = \ln y,$$

como queríamos. Em particular, se $n > 0$ é um inteiro, então

$$\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ vezes}}) = n \ln x.$$

A igualdade vale também se n é um inteiro negativo. De fato, dado $n > 0$, basta aplicar ln a ambos os membros da igualdade $x^n \cdot x^{-n} = 1$ para concluir que $\ln(x^{-n}) = -\ln(x^n) = -n \ln x$. Mais geralmente, se $r = p/q$ com p, q inteiros e $q > 0$, então, como $(x^r)^q = x^p$, podemos aplicar ln e obter $q \cdot \ln(x^r) = \ln(x^p) = p \ln x$, logo, $\ln(x^r) = r \ln x$. Temos assim, o seguinte teorema.

Teorema 1.1 *A função* ln *definida em (1.1) tem as seguintes propriedades:*

1. $\ln 1 = 0$;
2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ *para todos* $x, y > 0$;
3. $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$ *para todo* $x > 0$ *e* r racional;
4. $(\ln x)' = 1/x$, *para todo* $x > 0$;

5. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$*;*

6. $\ln$ *é uma bijeção crescente entre* $(0,\infty)$ *e* $\mathbb{R}$.

Prova. É suficiente mostrarmos a propriedade (5). Como $\ln(2^n) = n\cdot\ln 2$ e $\ln 2 > 0$, segue que $\lim_{n\to\infty}\ln(2^n) = +\infty$. Como ln é crescente, temos $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$. Usando 2^{-n} em lugar de 2^n, argumentos semelhantes mostram que $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$. ∎

Sendo ln uma bijeção entre $(0,\infty)$ e $\mathbb{R}$, podemos considerar a sua função inversa, chamada de *função exponencial*, a qual denotaremos por $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Assim, relação entre exp e ln é dada pelas igualdades

$$\exp(\ln x) = x \text{ e } \ln(\exp y) = y$$

para todos $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$. O teorema a seguir enuncia as principais propriedades de exp.

Teorema 1.2 *A função* $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ *tem as seguintes propriedades:*

1. $\exp 0 = 1$*;*

2. $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$*, para todos* $x, y \in \mathbb{R}$*;*

3. $(\exp x)^r = \exp(rx)$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e* r racional*;*

4. $(\exp x)' = \exp x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

5. $\lim_{x\to-\infty}\exp x = 0$ *e* $\lim_{x\to+\infty}\exp x = +\infty$.

Prova. A propriedade (1) decorre diretamente da definição de função inversa. Para (2), fixados $x, y \in \mathbb{R}$, sejam $a, b > 0$ tais que $x = \ln a$ e $y = \ln b$. então,

$$\exp(x+y) = \exp(\ln a + \ln b) = \exp(\ln(ab)) = ab = (\exp x)(\exp y)\,.$$

Para provar (3), basta ver que $\ln((\exp x)^r) = r\ln(\exp x) = rx$ e $\ln(\exp(rx)) = rx$. Como ln é bijetora, segue a igualdade em (3).

Para derivar exp, usamos a fórmula conhecida para derivada de uma função inversa: se $y = \ln x$ então $(\exp)'(y) = \frac{1}{(\ln)'(x)} = \frac{1}{1/x} = x = \exp y$, para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Os limites em (6) decorrem imediatamente do fato que exp é a inversa de ln. ∎

2 O número *e*

Definamos o número e pela igualdade $\exp 1 = e$. Vemos que

$$\exp n = \exp(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{\exp 1 \cdot \ldots \cdot \exp 1}_{n \text{ vezes}} = e^n\,,$$

se $n > 0$ é inteiro. Ainda neste caso, vemos que $\exp(-n) = (\exp n)^{-1} = (e^n)^{-1} = e^{-n}$. Se $r = \frac{p}{q}$ com p e $q > 0$ inteiros, então $(\exp r)^q = \exp(p) = e^p$; extraindo a raiz q-ésima de ambos os membros, temos $\exp r = e^r$. Isso prova a proposição abaixo.

Proposição 2.1 *Dado qualquer* r racional *tem-se que* $\exp r = e^r$.

Vejamos outra expressão para o número e. Pondo $f(x) = \ln(1+x)$, temos que a derivada de f em $x = 0$ é 1. Isto significa, pela definição de derivada, que

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},.$$

Fazendo $x \to 0$ pela sequência $x_n = 1/n$, $n \geq 1$, segue que

$$1 = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Como $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)\right)$ e exp é uma função contínua, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp 1 = e.$$

Vamos mostrar agora que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Escrevamos $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ e $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para cada $n \geq 1$. Em primeiro lugar, como $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \geq 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^{n-1}$ para cada $n \geq 2$, temos que

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3,$$

para todo $n \geq 1$, portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente. Denotando por α sua soma, vemos que $2 \leq \alpha \leq 3$.

Vamos analisar agora a sequência b_n. Desenvolvendo b_n pelo binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2 \cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Cada termo da última soma é menor que o termo correspondente na soma definindo a_n, portanto, $b_n < a_n$ para todo $n \geq 1$. Como $\{b_n\}$ converge para e, temos que $e \leq \alpha$. Vamos provar que $e = \alpha$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja p tal que $\alpha - a_p < \varepsilon$, isto é, $\alpha - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{p!}\right) < \varepsilon$. Dado qualquer $n > p$, temos que

$$b_n > 1 + 1 + \tfrac{1}{2!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{3!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n}\right) + \ldots + \tfrac{1}{p!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \tfrac{p-1}{n}\right).$$

Mantendo p fixo e fazendo $n \to \infty$ na última desigualdade, vemos que

$$e = \lim_{n\to\infty} b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{p!} = a_p > \alpha - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\varepsilon \to 0$, temos que $e \geq \alpha$, e portanto, $e = \alpha$, como queríamos. Logo,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

3 Potências reais

Nesta seção, vamos usar as funções da seção 1 para definirmos potências da forma a^x com $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Começamos definindo $e^x = \exp x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Se x é racional, a nossa definição coincide com a definição usual, pela proposição 2.1. Para passarmos a uma base qualquer $a > 0$, observamos que $a = \exp(\ln a) = e^{\ln a}$, o que nos incentiva a *definir* a *função exponencial na base a* por

$$a^x = e^{x \ln a}\,,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. A função exponencial na base a tem propriedades bastante semelhantes às da função exponencial natural.

Teorema 3.1 *A função exponencial na base a tem as seguintes propriedades:*

1. $a^0 = 1$;
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ *para* $x, y \in \mathbb{R}$;
3. $(a^x)^y = a^{xy}$ *para* $x, y \in \mathbb{R}$;
4. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$, $x \in \mathbb{R}$;
5. *Se* $a > 1$ *então* $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. *A aplicação* $x \mapsto a^x$ *é uma bijeção crescente entre* $\mathbb{R}$ *e* $(0, \infty)$;
6. *Se* $0 < a < 1$ *então* $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ *e* $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$. *A aplicação* $x \mapsto a^x$ *é uma bijeção decrescente entre* $\mathbb{R}$ *e* $(0, \infty)$.

Observação 3.2 Com a definição de exponencial na base a dada acima, é imediato verificar que os ítens (3) dos teoremas 1.1 e 1.1 são válidos também para $r \in \mathbb{R}$.

Pelo teorema 3.1, vemos que a função exponencial de base a admite uma inversa, chamada de *logaritmo na base a*, denotada por $\log_a$. Decorre diretamente da definição que $a^x = y$ se e só se $\log_a y = x$, para quaisquer $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Evidentemente, $\log_e x = \ln x$, para todo $x > 0$.

Teorema 3.3 *A função* $\log_a$ *tem as seguintes propriedades:*

1. $\log_a 1 = 0$;
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ *para todos* $x, y > 0$;
3. $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$ *para todo* $x > 0$ *e* r racional;
4. $(\log_a x)' = 1/x \ln a$, *para todo* $x > 0$;
5. *Se* $a > 1$ *então* $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$, *e portanto* $x \mapsto \log_a x$ *é uma bijeção crescente entre* $(0, \infty)$ *e* $\mathbb{R}$;
6. *Se* $0 < a < 1$ *então* $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ *e* $\lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$, *e portanto* $x \mapsto \log_a x$ *é uma bijeção decrescente entre* $(0, \infty)$ *e* $\mathbb{R}$;

Finalmente, como $e^{\ln x} = x = a^{\log_a x} = e^{\ln a \cdot \log_a x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos que $\ln x = \ln a \cdot \log_a x$, de onde obtemos a relação

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\,.$$

Exercício 3.4 Dado qualquer $a > 0$ use uma argumentação semelhante àquela utilizada na seção 2 para mostrar que

$$e^a = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\,.$$