UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM121 - Equações diferenciais e aplicações - 2012/2
Prof. José Carlos Eidam

Lista 1

✰ Equações diferenciais de primeira ordem

1. Determine as soluções das equações diferenciais de variáveis separáveis abaixo:

   (a) $y' = y^2$ (b) $xy' = y$ (c) $yy' = x$ (d) $y' = (1-y)(2-y)$

   (e) $y' = e^{x-2y}$ (f) $x^2y^2y' = 1+x^2$ (g) $y' = \sec^2 x \sec^3 y$ (h) $y' = y \ln x$

   (i) $3x^2y' = 2y(y-3)$ (j) $y' = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$ (k) $y' = \dfrac{y\cos x}{1+2y^2}$ (l) $y' = \dfrac{x^2}{y}$

   (m) $y' = \dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$ (n) $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$ (o) $y' = 1+x+y^2+xy^2$ (p) $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

   (q) $xy' = \sqrt{1-y^2}$ (r) $y' = \dfrac{x-e^{-x}}{y+e^y}$ (s) $y' = \dfrac{x^2}{1+y^2}$ (t) $y' = \dfrac{2x}{1+2y}$

2. Determine as soluções das equações diferenciais lineares de 1a ordem abaixo:

   (a) $(x+3y) - xy' = 0$ (b) $y' = 2y + e^x$ (c) $y' - 2xy = x$ (d) $y' + 3y = x + e^{-2x}$

   (e) $y' - 2y = x^2e^{2x}$ (f) $y' + y = xe^{-x} + 1$ (g) $xy' + y = 3x\cos(2x)$ (h) $y' - y = 2e^x$

   (i) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$ (j) $y' - 2y = e^{2x}$ (k) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$ (l) $x^2y' + 2xy = \cos x$

   (m) $y' = x^3 - 2xy$ (n) $y' \operatorname{sen} x + y\cos x = 1$ (o) $xy' + x^2y = e^{-x^2/2}$ (p) $(1+x^2)y' + xy = -(1+x^2)^{5/2}$

3. Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

   (a) $y(6x^2y^2 - x + 1) + 2xy' = 0$ (b) $y' = y + e^{-3x}y^4$ (c) $2x^3y' = y(y^2+3x^2)$

   (d) $x^3y' = 2y(\sqrt[3]{y} + 3x^2)$ (e) $y' = 5y - \dfrac{4x}{y}$ (f) $y' = y - y^3$

   (g) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$ (h) $y' = y - y^2$ (i) $y - 2xy = xy^2$

4. Resolva as seguintes equações homogêneas de primeira ordem:

   (a) $y' = \dfrac{x+y}{x}$ (b) $2y - xy' = 0$ (c) $y' = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$ (d) $y' = \dfrac{y^2+2xy}{x^2}$

   (e) $y' = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$ (f) $y' = -\dfrac{4x+3y}{2x+y}$ (g) $y' = \dfrac{x+3y}{x-y}$ (h) $x^2y' - x^2 - 3xy - y^2 = 0$

   (i) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$ (j) $2xy' - 2y - \sqrt{x^2-y^2} = 0$ (k) $xy' = y + xe^{y/x}$ (l) $x^2y' - y - xy = 0$

   (m) $y' = \dfrac{y}{x} + \cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (n) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$ (o) $xy' = \sqrt{x^2+y^2}$ (p) $xy' = y + xe^{2y/x}$

   (q) $y' = \dfrac{x+2y}{x}$ (r) $y' = \dfrac{y^2-2xy}{x^2}$ (s) $y' = \dfrac{y^2}{xy+y^2}$ (t) $y' = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

5. Resolva as equações diferenciais de primeira ordem abaixo, determinando um fator integrante para as não-exatas:

(a) $(x+y)dx + x\,dy = 0$

(b) $(xe^y + y - x^2)dy = (2xy - e^y - x)dx$

(c) $\cos\, x\,dy = (1 - y - \operatorname{sen} x)dx$

(d) $y(x^2+y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$

(e) $(x^2+y^2)dx + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)dy = 0$

(f) $dx + \cos y dy = 0$

(g) $(y - x^3)dx + (y^3 + x)dy = 0$

(h) $(3x^2 + y)dx + (x+4)dy = 0$

(i) $(x+2y)dx + (2x+1)dy = 0$

(j) $y' = \dfrac{3x^2 - y}{x - 3y^2}$

(k) $(2x + \operatorname{sen} y)dx + x\cos y dy = 0$

(l) $(3y^2 - x^2 + 1)dx + 2xy = 0$

(m) $(xy^2 + 2)dx + 3x^2 y = 0$

(n) $(2x + 3y)dx + x^3 dy = 0$

(o) $e^{x+y^2}dx + 2ye^{x+y^2}dy = 0$

(p) $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right) + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right) y' = 0$

(q) $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$

(r) $(1 - xy)y' = y^2$

(s) $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2)dy = 0$

(t) $(2y^3 + 2)dx + 3xy^2 dx = 0$

6. Resolva os ítens abaixo sobre fatores integrantes:

(a) Determine todas as funções f que tornam exata a equação diferencial $(y^2 \operatorname{sen} x)dx + yf(x)dy = 0$.

(b) A equação $g(x)dy + (y+x)dx = 0$ tem $h(x) = x$ como fator integrante. Determine todas as possíveis funções g.

(c) A equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ tem um fator integrante da forma $f(x,y) = e^{ax}\cos y$. Determine$a$ e resolva a equação.

(d) Determine um fator integrante da forma $h(x,y) = x^n y^m$ para a equação

$$y(y^2+1)dx + x(y^2-1)\ln x dy = 0$$

e resolva-a.

(e) Determine um fator integrante da forma $\mu = \mu(x+y^2)$ para a equação

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0\,.$$

7. Mostre que y_1 é solução de cada uma das equações de Ricatti abaixo e encontre a solução geral para cada uma das equações:

(a) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$, $y_1 = x$

(b) $x^2 y' = -1 - xy + x^2 y^2$, $y_1 = x^{-1}$

(c) $2y'\cos x = 2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + y^2$, $y_1 = \operatorname{sen} x$

(d) $x^2 y' + y^2 + xy = 3x^2$, $y_1 = x$

(e) $x^2 y' - x^2 y^2 + xy + 1 = 0$, $y_1 = x^{-1}$

(f) $y' - 1 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$, $y_1 = x$

8. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y' - y = 2xe^{2x}$, $y(0) = 1$

(b) $y' + 2y = xe^{-2x}$, $y(1) = 0$

(c) $x^2 y' + 2xy = \cos x$, $y(\pi) = 0$

(d) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$, $y(\pi/2) = 1$

(e) $y' = x + y$, $y(0) = 1$

(f) $(\cos x)y' - (\operatorname{sen} x)y = 1$, $y(2\pi) = \pi$

(g) $y' = y^2$, $y(0) = 1$

(h) $y' = \dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$, $y(0) = 1$

(i) $y' = \dfrac{3x^2+4x+2}{2y-2}$, $y(0) = -1$

(j) $y' = \dfrac{y\cos x}{1+2y^2}$, $y(0) = 1$

(k) $y' = \dfrac{2x}{y+x^2y}$, $y(0) = -2$

(l) $y' = \dfrac{y^3}{1-2xy^2}$, $y(0) = 1$

✰ Respostas

(1)

(a) $y \equiv 0$ e $y = \frac{1}{C-x}$; (b) $y = Cx$; (c) $y = \pm\sqrt{x^2+C}$; (d) $y \equiv 1$, $y \equiv 2$, $y = \frac{Ce^x-2}{Ce^x-1}$;
(e) $y = \frac{1}{2}\ln(2e^x + C)$; (f) $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2-3-Cx}{x}}$; (g) $3\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}^3 x = 3\operatorname{tg} x + C$; (h) $y = C(x/e)^x$
(i) $y \equiv 0$, $y \equiv 3$ e $y = \frac{3}{1-Ce^{-2/x}}$; (j) $y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$; (k) $\ln|y| + y^2 = \operatorname{sen} x + C$;
(l) $3y^2 - 2x^3 = C$; (m) $3y^2 - 2\ln|1+x^3| = C$; (n) $y = 0$ e $y = (C - \cos x)^{-1}$; (o) $y = \operatorname{tg}(x + x^2/2 + C)$;
(p) $y = (1/2)\arctan(x + (1/2)\operatorname{sen}(2x) + C)$; (q) $y = \pm 1$ e $y = \operatorname{sen}(\ln|x| + C)$;
(r) $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = C$; (s) $3y + y^3 - x^3 = C$; (t) $y^2 + y = x^2 + C$.

(2)

(a) $y = Cx^3 - \frac{x}{2}$; (b) $y = Ce^{2x} - e^x$; (c) $y = -1/2 + Ce^{x^2}$; (d) $y = Ce^{-3x} + (x/3) - (1/9) + e^{-2x}$;
(e) $y = Ce^{2x} + x^3e^{2x}/3$; (f) $y = Ce^{-x} + 1 + x^2e^{-x}/2$; (g) $y = C/x + (3\cos 2x)/(4x) + (3/2)\operatorname{sen} 2x$;
(h) $y = Ce^x + 2xe^x$; (i) $y = (C - x\cos x + \operatorname{sen} x)/x^2$; (j) $y = (x + C)e^{2x}$; (k) $y = (C - x\cos x + \operatorname{sen} x)/x^2$;
(l) $y = (C + \operatorname{sen} x)/x^2$; (m) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$; (n) $y = \frac{x+C}{\operatorname{sen} x}$; (o) $y = e^{-x^2/2}(\ln|x| + C)$;
(p) $y = \frac{C-15x-10x^3-3x^5}{15\sqrt{1+x^2}}$;

(3)

(a) $y \equiv 0$, $y^2 = \frac{1}{6x+Cxe^{-x}}$; (b) $y \equiv 0$, $y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{C-3x}}$; (c) $y \equiv 0$, $y^2 = \frac{x^3}{C-x}$; (d) $y \equiv 0$, $y = \frac{27x^6}{(C-\ln(x^2))^3}$;
(e) $y = Ce^{10x} + \frac{20x+2}{25}$; (f) $y = \pm(Ce^{-2x} + 1)^{-1/2}$; (g) $y = (2/5x + Cx^4)^{-1/2}$; (h) $y = (1 + Ce^{-x})^{-1}$;
(i) $y = (-1/2 + Ce^{-x^2})^{-1}$

(4)

(a) $y = Cx + x\ln|x|$; (b) $y = Cx^2$; (c) $\arctan(y/x) - \ln|x| = C$; (d) $y = Cx^2(1 - Cx)^{-1}$;
(e) $|y - x| = C|y + x|^3$; (f) $|y + x|(y + 4x)^2 = C$; (g) $-\frac{2x}{x+y} = C + \ln|x + y|$; (h) $\frac{x}{x+y} + \ln|x| = C$;
(i) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$ se $x > 0$ e $y - \sqrt{x^2 + y^2} = -C$ se $x < 0$; (j) $2\arcsin(y/x) - \ln|x| = C$;
(k) $e^{-y/x} - \ln|x| = C$; (l) $\sqrt{1 + (y/x)^2} = Cx$; (o) $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C$; (p) $y = (1/2)x\ln(2\ln|x| + C)$;
(q) $y = Cx^2 - x$; (r) $y = \frac{3x}{1-Cx^3}$; (s) $y + x\ln|y| = Cx$; (t) $y = x\operatorname{tg}(C + \ln x)$;

(5)

(a) $x^2+2xy=C$; (b) $x^2+y^2+2xe^y-2x^2y=C$; (c) $y=\frac{x+C}{\sec x+\operatorname{tg} x}$; (d) $y^3(x^2-y^2)=Cx$;
(e) $x^3+3xy^2=Ce^{-3y}$; (f) $y=\arcsin(C-x)$; (g) $4xy-x^4-y^4=0$; (h) $y=\frac{C-x^3}{x+4}$; (i) $y=\frac{x^2+C}{2(1-2x)}$;
(j) $xy-x^3-y^3=C$; (k) $y=\arcsin\left(\frac{C-x^2}{x}\right)$; (l) $15x^3y^2-3x^5+5x^3=C$; (m) $x^{2/3}y^2+2x^{2/3}=C$;
(n) $y=\frac{C-x^4}{2x^3}$; (o) $y=\pm\sqrt{C-x}$; (p) $x^3\operatorname{tg} y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C$; (q) $y^2-2xy+\ln(x^2)=C$; (l) $xy-\ln|y|=C$;
(s) $y\ln|x|+3x^2-2y=0$; (t) $x^2(y^3+1)=C$;

(6)

(a) $f(x)=C-2\cos x$; (b) $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$; (c) $a=-1$, $x+e^{-x}\operatorname{sen} y=C$;
(d) $n=-1$, $m=-2$, $(y^2+1)\ln x=Cy$ e $y\equiv 0$; (e) $\mu(x+y^2)=x+y^2$;

(7)

(a) $y=x+(C-x)^{-1}$; (b) $y=x^{-1}+2x(c-x^2)^{-1}$; (c) $y=\operatorname{sen} x+(C\cos x-(1/2)\operatorname{sen} x)^{-1}$;
(d) $y=x+4x(4Cx^4-1)^{-1}$; (e) $y=x^{-1}+2x(C-x^2)^{-1}$; (f) $y=x+(C-x)^{-1}$

(8)

(a) $y=3e^x+2(x-1)e^{2x}$; (b) $y=(1/2)(x^2-1)e^{-2x}$; (c) $y=x^{-2}\operatorname{sen} x$;
(d) $y=x^{-2}(\pi^2/4-1-x\cos x+\operatorname{sen} x)$; (e) $y=2e^x-x-1$; (f) $y=\frac{x-\pi}{\cos x}$; (g) $y=(1-x)^{-1}$;
(h) $y=(1+(2/3)\ln(1+x^3))^{1/2}$; (i) $y=1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$; (j) $\ln|y|+y^y=1+\operatorname{sen} x$;
(k) $y=-(2\ln(1+x^2)+4)^{1/2}$; (l) $xy^2-\ln|y|=0$