UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM121 - Equações diferenciais e aplicações - 2012/2
Prof. José Carlos Eidam

Lista 2 - Aplicações de equações diferenciais de primeira ordem

✰ Decaimento radioativo

1. O isótopo radioativo *tório 234* se desintegra à uma taxa proporcional à sua massa presente. Se $100mg$ desta substância se reduzem à $82.04mg$ em uma semana, encontre uma expressão para a quantidade deste isótopo em qualquer momento e calcule a meia-vida τ deste material.

2. O decaimento do isótopo radioativo *plutônio 241* satisfaz à equação diferencial

$$Q' = -0,0525Q\,.$$

   (a) Determine a meia-vida desta substância.

   (b) Se hoje dispusermos de $50mg$ desta substância, quanto restará dela depois de decorridos 10 anos?

3. O elemento *einsteinio 253* decai à uma taxa proporcional à sua massa presente. Determine a meia-vida τ deste material, sabendo que o mesmo perde um terço de sua massa em 11.7 dias.

4. A meia-vida do elemento *rádio 226* é de 1620 anos. Determine o tempo necessário para que uma amostra deste elemento tenha sua massa reduzida a $3/4$ do original.

5. O *carbono-14* é um isótopo radioativo natural do elemento carbono presente em todos os organismos vivos. Enquanto um organismo permanece vivo a relação quantitativa entre o carbono-14 e o carbono-12 permanece constante. O químico norte-americano Willard Libbs descobriu nos anos 50 que, a partir da morte de organismo, o carbono-14 se transforma em carbono-12 a uma taxa proporcional à quantidade de carbono-14 existente. O carbono-14 é, dentre os isótopos estáveis do carbono, aquele que possui a maior meia-vida: 5730 anos.

   (a) Em 1988, cientistas do Museu Britânico tiveram acesso ao corte de tecido de linho chamado de *Santo Sudário* e constataram que o tecido conservava ainda 92% de sua quantidade original de carbono-14. Determine, a partir destes dados, a data em que o tecido foi confeccionado.*

   (b) Em 2008, cientistas ingleses constataram que o material orgânico em torno do Stonehenge, o misterioso monumento erigido no sul da Inglaterra, continha 59% de sua quantidade original de carbono-14. Determine uma data provável para a sua construção.

---

*O resultado do teste, motivo de intensa controvérsia, é debatido até hoje.

☆ **Aplicações financeiras**

6. Suponha que um determinado investidor que dispõe de um capital inicial $C_0 > 0$ deseja investí-lo à uma taxa anual de juros de α% ao ano.

   (a) Mostre que se a aplicação tiver rendimento uma única vez ao ano, então o capital $C(t)$ após t anos será dado por $C(t) = C_0(1+\alpha)^t$.

   (b) Mostre que se a aplicação tiver k composições de rendimento α/k% por ano, então o capital após t anos será $C(t) = C_0\left(1+\dfrac{\alpha}{k}\right)^{kt}$. Estude o que ocorre para valores grandes de k.

   (c) Muitas aplicações financeiras atualmente tem composição *contínua* de rendimentos, sendo assim, o capital investido cresce continuamente à razão α em relação ao capital investido. Encontre uma expressão para o capital $C(t)$ após t anos.

   (d) Compare as três aplicações descritas acima e decida qual delas é mais rentável.

7. Um determinado investidor deposita um capital inicial C_0 no banco **A**, que paga juros de 5% ao ano compostos continuamente.

   (a) Determine quanto tempo será necessário para que o valor investido dobre.

   (b) O banco **B** dispõe de uma linha de crédito que paga juros de $5,5$% compostos anualmente. Qual das aplicações financeiras é mais rentável?

8. Suponha que você receba as duas propostas abaixo para trabalhar por um mês:

   A. Você recebe 1 milhão de reais no final do mês.

   B. Você recebe 1 centavo no primeiro dia, 2 centavos no segundo dia, 4 centavos no terceiro dia, e, em geral, 2^{n-1} centavos no n-ésimo dia.

   Qual delas é mais lucrativa?

9. Um cidadão precavido, com o intuito de programar sua aposentadoria aos 65 anos, pretende investir certa quantia C_0 reais em um fundo de investimentos que paga juros de 4% ao ano, compostos diariamente. Sabendo que o cidadão tem atualmente 30 anos, determine quanto deve ser o capital investido para que ele disponha de 200.000 reais ao se aposentar.

10. Um determinado bem sofre depreciação contínua de seu valor inicial à taxa de 5% ao ano. Determine quanto tempo será necessário para que o valor do bem atinja $1/3$ do seu valor inicial.

11. Um investidor deposita um certo capital em fundo de investimento que rende juros de 7% ao ano, compostos continuamente. O governo retém 30% do rendimento obtido, sob forma de impostos e o investidor deseja sacar suas economias quando o montante investido ultrapassar o dobro do montante inicial.

    Quanto tempo o investidor deve esperar para retirar seu dinheiro do fundo?

12. Devido à má administração, o patrimônio de uma empresa decresce continuamente à uma taxa de 1% ao mês e seu lucro mensal equivale à quinta parte de seu patrimônio. O estatuto financeiro da empresa obriga os diretores a decretarem falência quando a soma entre patrimônio e lucro mensal for inferior à 60% do patrimônio inicial. Qual é o prazo máximo para que os diretores da empresa decretem falência?

✰ Diluição de soluções

13. Consideremos um reservatório contendo V litros de água pura que começa a receber, a uma vazão constante de a litros por segundo, uma solução salina com concentração de c kg de sal por litro de solução. O reservatório disponha de um mecanismo que mantém a solução homogênea à medida que o reservatório enche. Suponhamos que, concomitantemente com a injeção de água salgada no reservatório, começa a ser retirada do reservatório a solução formada, à razão constante de a litros por segundo.

    (a) Denotando por $x(t)$ a quantidade de sal, em kg, presente no reservatório em um instante t, mostre que x satisfaz a equação diferencial

    $$\frac{dx}{dt} = ac - \frac{ax}{V}.$$

    (b) Determine a solução geral do problema acima.

    (c) Verifique o que acontece com a concentração de sal no reservatório quando $t \to \infty$.

14. Consideremos um reservatório contendo V litros de uma solução salina com concentração de b kg de sal por litro começa a receber, a uma vazão constante de a_+ litros por segundo, uma solução salina com concentração de c kg de sal por litro de solução. O reservatório disponha de um mecanismo que mantém a solução homogênea à medida que o reservatório enche. Suponhamos que, concomitantemente com a injeção de água salgada no reservatório, começa a ser retirada do reservatório a solução formada, à razão constante de a_- litros por segundo.

    (a) Denotando por $x(t)$ a quantidade de sal, em kg, presente no reservatório em um instante t, mostre que x satisfaz a equação diferencial

    $$\frac{dx}{dt} = a_+ c - \frac{a_- x}{V + (a_+ - a_-)t}.$$

    (b) Determine a solução geral do problema acima.

    (c) No caso em que $a_+ = a_-$, verifique o que acontece com a concentração de sal no reservatório quando $t \to \infty$.

15. Num tanque há 100 litros de uma solução contendo 30 gramas de sal. Água (sem sal) entra no tanque à razão de 6 litros por minuto e a mistura se escoa à razão de 4 litros por minuto, conservando-se a concentração uniforme por agitação.

    (a) Determine uma expressão para a quantidade e para a concentração de sal no tanque em um tempo t qualquer.

    (b) Determinar qual a concentração de sal no tanque ao final de 35 minutos.

16. Um tanque industrial para líquidos contém 2000 litros de uma solução contendo 40 kg de determinado soluto. É despejada no tanque, à uma vazão de 1 litro por minuto, uma solução do mesmo soluto com concentração de 100 gramas por litro. A mistura é mantida homogênea e simultaneamente retirada, à vazão de 2 litros por minuto.

    (a) Determine a quantidade e a concentração de soluto no tanque em um tempo t qualquer.

    (b) Verifique o comportamento da quantidade de soluto e da concentração ao longo do tempo.

17. A prefeitura de determinada localidade decidiu mudar a taxa de fluorização da água que os habitantes usam. No reservatório local, que possui 300 mil metros cúbicos de água, há 2000 kg de flúor. O consumo médio de água na cidade é de 3 mil metros cúbicos por dia e a água utilizada é reposta com fluorização de 100 gramas de flúor por m^3.

    (a) Determine a quantidade de flúor no reservatório em um tempo t qualquer.

    (b) Determine o que ocorre com a concentração de flúor na água quando $t \to \infty$.

18. Suponha que uma sala contenha 1.200 litros de ar originalmente isento de monóxido de carbono. A partir do instante $t = 0$, fumaça de cigarro contendo 4% de monóxido de carbono é introduzida na sala com uma vazão de $0,1$ l/min e a mistura gasosa homogênea sai do aposento com a mesma vazão.

    (a) Determine expressões para a quantidade e para a concentração de monóxido de carbono no aposento para $t > 0$.

    (b) A exposição prolongada a concentrações de monóxido decarbono maiores do que $0,012\%$ é prejudicial à saúde. Determine o intervalo de tempo após o qual esta concentração é atingida.

✰ Crescimento populacional

19. Neste exercício, discutiremos alguns modelos matemáticos para o crescimento populacional. Se $p(t)$ denota determinada população em função do tempo, então a quantidade $p'(t)/p(t)$ é chamada de *taxa de crescimento populacional* no instante t.

    (a) Em 1798, o reverendo anglicano Thomas Malthus propõe um modelo de crescimento populacional no qual a taxa de crescimento é constante igual a λ. se a população no instante inicial é p_0, determine a população em um instante t qualquer. Este modelo, analisado à longo prazo, corresponde à realidade?

    (b) Em 1834, Verhlust e Pearl estudando o crescimento das populações da França e da Bélgica, propuseram um modelo matemático no qual a taxa de crescimento populacional é controlada pelo número máximo de indivíduos que podem coexistir, em condições ideais. Se N é este número, então a taxa de crescimento populacional é dada, neste modelo é proporcional à $\left(1 - \dfrac{p}{N}\right)$. Determine[†] a população em um instante t qualquer, sabendo que $p(0) = p_0$.

[†]Isso significa, que, à medida em que a população se aproxima de N, sua taxa de crescimento diminui, o que é uma hipótese bem razoável.

(c) Verifique, no modelo de Verhlust o que ocorre com a população quando $t \to \infty$. Esboce o gráfico das solução e mostre que todas elas são crescentes e possuem um ponto de inflexão em $t = N/2\lambda$. Estas curvas são chamadas de *logísticas*. Analise o que significa, na prática, a existência de um ponto de inflexão.

(d) Em 1825, o matemático Benjamim Gompertz, após dedicar-se ao estudo de tabelas de mortalidade no Reino Unido, conclui que a taxa de mortalidade por indivíduo em uma população é proporcional a $-e^{at}$. Determine a quantidade de indivíduos da população em um instante t qualquer, sabendo que $p(t) = p_0$.

(e) Nos anos 1930, o matemático italiano Vito Volterra propoe um modelo de crescimento populacional baseado nas seguintes hipóteses:

i. $p = p(t)$ é a população;

ii. O coeficiente de mortalidade é ε e εp é o número de indivíduos mortos por unidade de tempo;

iii. $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$ e αp, βp representam o número de machos e de fêmeas, respectivamente;

iv. O número de encontros entre os dois sexos por unidade de tempo é proporcional a $(\alpha p)(\beta p) = \alpha\beta p^2$;

v. Se o nascimento de m novos membros da população corresponde a n encontros, então o número de nascimentos por unidade de tempo é $k\alpha\beta p^2 \frac{m}{n}$.

Este modelo nos conduz à conclusão que

$$p' = -\varepsilon p + k\alpha\beta p^2 \frac{m}{n} = (-\varepsilon + \lambda p)p,$$

onde $\lambda = k\alpha\beta\frac{m}{n}$. Encontre uma expressão para a população em um instante t qualquer, sabendo que $p(0) = p_0$. Qual a impropriedade deste modelo?

(f) A fim de melhorar seu modelo, Volterra supõe que o número de nascimentos por unidade de tempo é, ao invés de $k\alpha\beta p^2 \frac{m}{n}$, dado por $k\alpha\beta p^2 \frac{m-\rho p}{n} = \lambda p - \mu p^3$. Assim, obtemos a equação $p' = (-\varepsilon + \lambda p - \mu p^2)p$. Admitindo a existência de raízes reais distintas α, β para o polinômio $-\varepsilon + \lambda p - \mu p^2$, podemos escrever a última equação como $p' = -\mu(p-\alpha)(p-\beta)p$. Assumindo que $p(0) = p_0$, resolva esta última equação e encontre uma expressão para a população em um tempo t qualquer.

☆ Resfriamento de um corpo

20. Consideremos um modelo para o fenômeno de mudança de temperatura de um corpo por perda de calor para o ambiente no qual a temperatura $T = T(t)$ é uniforme ao longo do corpo e depende unicamente do tempo e a temperatura ambiente T_a é constante ao longo do tempo e uniforme em todo o ambiente. Além disso, suponhamos que o fluxo de calor através das paredes do corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. (Lei de resfriamento de Newton)

(a) Mostre que $T' = -c(T - T_a)$ e determine a temperatura em um instante qualquer, assumindo que a temperatura inicial é $T(0) = T_0$.

(b) O que ocorre com a temperatura do corpo quando $t \to \infty$?

(c) A fim de melhorar o modelo descrito no ítem (a), vamos permitir que a temperatura do ambiente varie ao longo do tempo ao receber ou ceder calor ao corpo e mantenhamos as demais hipóteses anteriores. A lei de conservação da quantidade de calor nos diz que

$$mc(T_0 - T) = m_a c_a (T_a - T_{a,0}),$$

onde m, m_a e c, c_a denotam as massas e calores específicos do ambiente e do corpo e $T_a = T_a(t)$, $T_{a,0} = T_a(0)$ denotam a temperatura ambiente e a temperatura ambiente inicial, respectivamente. Substituindo na equação do ítem (a) a expressão de T_a retirada da última equação, mostre que $T = T(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$T' + c(1+A)T = c(T_{a,0} + AT_0),$$

onde $A = (mc)/(m_a c_a)$. Determine a temperatura do corpo em um instante qualquer.

(d) Neste último modelo, o que ocorre com a temperatura quando $t \to \infty$?

21. Um corpo a 100°C é posto numa sala onde a temperatura ambiente se mantém constantemente 25°C. Após 5 minutos, a temperatura do corpo caiu para 90°C. Depois de quanto tempo o corpo estará a 50°C?

22. Um corpo a 100°C é posto numa sala onde a temperatura ambiente se mantém constante. Após 10 minutos a temperatura do corpo é 90°C e após 20 minutos 82°C. Determine a temperatura da sala.

23. Um corpo a 100°C é posto em um reservatório com água à 50°C e, após 10 minutos, a temperatura do corpo e da água passam a ser 80°C e 60°C, respectivamente. Suponhamos que todo o calor cedido pelo corpo é absorvido e mantido pela água.

(a) Calcule depois de quanto tempo a temperatura do corpo será 75°C.

(b) Determine a temperatura de equilíbrio.

24. Qual deve ser a temperatura da água para que um objeto de ferro de $0,5$kg a 100°C imerso em 4kg de água venha a uma temperatura de 30°C em meia-hora? (O calor específico do ferro é $0,113$ (cal g $^{\circ}$C)$^{-1}$).

25. O café está a 90°C logo depois de coado e, um minuto depois, passa para 85°C. A temperatura da cozinha é constante igual a 25°C. Determine quanto tempo levará para que o café chegue a 60°C.

✰ Problemas geométricos

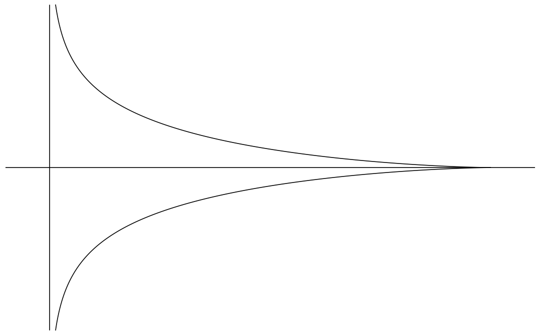
26. **(A tractriz)** A *tractriz* é a curva do plano xy que tem a propriedade que o segmento de reta tangente delimitado pelo ponto de tangência e o eixo y tem comprimento constante. Esta curva admite a seguinte descrição mecânica: admita que uma partícula P com certa massa é arrastada a partir de sua posição inicial sobre o eixo x ao longo de um plano horizontal áspero por meio de uma corda PQ de comprimento $a > 0$ mantida tensionada, de forma que a extremidade Q esteja sobre o eixo y. Esta curva foi estudada primeiramente por James Bernoulli em 1691, tem aplicações mecânicas na construção de eixos e acústicas na construção de alto-falantes.‡

‡A superfície obtida por rotação desta curva em torno do eixo y é a superfície chamada de *pseudo-esfera*. Esta superfície tem curvatura gaussiana constante negativa e é um modelo para a geometria de Lobatchevski.

(a) Nestas condições, mostre que o menor ângulo formado pelo segmento PQ e o eixo x tem tangente igual a $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. Conclua que, se o gráfico de $y=y(x)$ descreve a trajetória da particula no primeiro quadrante, então

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

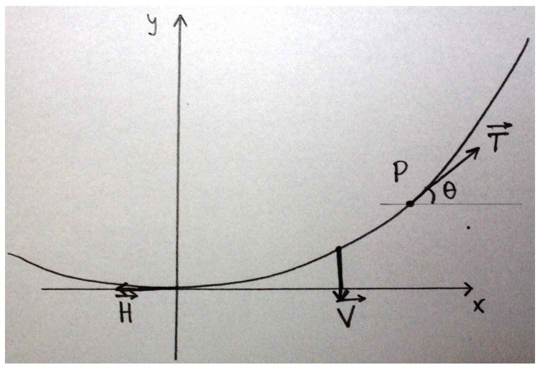
(b) Determine a solução para esta última equação. Certifique-se de que os gráficos de y e $-y$ descrevem a figura abaixo.



(c) Mostre que o

27. **(A catenária)** Neste exercício, vamos descrever a forma que toma um cabo flexível§ e inextensível suspenso em dois pontos e sujeito a seu próprio peso.

(a) Sejam $\vec{H}$ a tensão do cabo no seu ponto mais baixo (onde colocamos a origem do sistema de coordenadas, por simplicidade), $\vec{T}$ a tensão no ponto $P=(x,y)$ e $\vec{V}$ o peso do trecho de cabo OP. Temos que $V=\omega s$, onde ω é o peso por unidade de comprimento e s é o comprimento do arco OP.



Como o cabo está em equilíbrio, temos $\vec{H}+\vec{T}+\vec{V}=0$. Projetando nos eixos coordenados, temos que $-H+T\cos\theta=0=V+T\operatorname{sen}\theta$, onde H,T,V denotam os módulos das respectivas forças. Daí concluímos que $\operatorname{tg}\theta=cs$, onde $c=\omega/H$. Disso, concluímos, derivando, que $y''=c\frac{ds}{dx}$. Como $ds/dx=\sqrt{1+(dy/dx)^2}$, concluímos que a forma do cabo é a forma do gráfico da solução da equação $y''=c\sqrt{1+(y')^2}$.

(b) Faça $u=y'$, resolva a equação e esboce o gráfico.

§Isto significa que a tensão no cabo é sempre no sentido da tangente.

28. **(Curvas de perseguição)** Considere um rato que se encontra em repouso na origem, quando um gato localizado no ponto $(a,0)$ o avista e começa imediatamente a persegui-lo. Neste mesmo instante, o rato percebe a aproximação do gato e parte em fuga, no sentido positivo do eixo y à velocidade v. O gato corre sempre na direção em que está o gato à velocidade constante ω. Vamos determinar a curva $y = y(x)$ descrita pela trajetória do gato.

    (a) Decorrido um certo intervalo de tempo t, o gato se encontra no ponto $P = (x, y)$ e o rato no ponto $Q = (0, vt)$. Mostre que

    $$t = \frac{1}{\omega}\int_x^a \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

    (b) Mostre que $y' = -\dfrac{\overline{OQ}-y}{x}$. Como $\overline{OQ} = vt$, conclua que

    $$\frac{v}{\omega}\int_x^a \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = y - y'x.$$

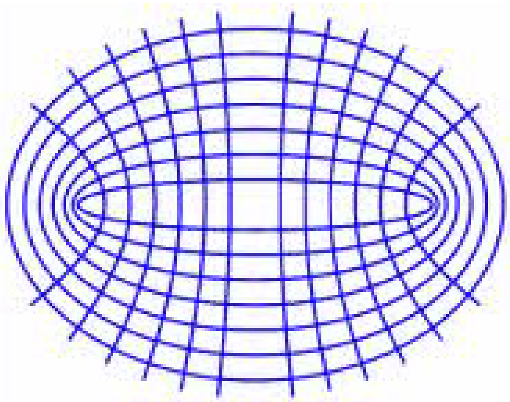
    Derive esta última equação e mostre que $xy'' = c\sqrt{1+(y'(x))^2}$, onde $c = v/\omega$.

    (c) Introduza a variável $u = y'$ e resolva a equação correspondente em u.

    (d) Determine $y = y(x)$.

    (e) Determine em que condições o gato alcança o rato. Determine o ponto em que o encontro ocorre.

29. **(Trajetórias ortogonais à uma família de curvas)** Dada uma família de curvas, um problema geométrico interessante consiste em encontrar outra família de curvas que intersecta ortogonalmente[¶] a família dada.



    (a) Mostre que se $y = y(x)$ é uma família de soluções da EDO $y' = f(x, y)$ então a família de trajetórias ortogonais é solução da equação $y' = -\dfrac{1}{f(x,y)}$.

    (b) Mostre que as trajetórias ortogonais à uma família de soluções de uma equação exata $Pdx+Qdy = 0$ são as soluções da equação $Qdx-Pdy = 0$. Conclua que as trajetórias ortogonais às curvas de nível de uma função $f = f(x, y)$ são soluções da equação $f_y dx-f_x dy = 0$.

[¶]Isso quer dizer que, as retas tangentes às curvas nos pontos de intersecção são perpendiculares.

(c) Uma função $f = f(x,y)$ é dita *harmônica* se $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Determine as trajetórias ortogonais às curvas de nível de uma função harmônica f. Faça isso explicitamente nos casos $f(x,y) = x^2 - y^2$, $f(x,y) = e^x \cos y$ e $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$.

(d) Encontre as trajetórias ortogonais às seguintes famílias de curvas, com $C \in \mathbb{R}$: (Esboços são bem-vindos!)

i. $y = Cx^2$

ii. $xy = C$

iii. $(x-C)^2 + y^2 = C^2$

iv. $x^2 - xy + y^2 = C^2$

v. $2Cy + x^2 = C^2$

vi. $x^2 + y^2 = C$

30. Fixado um ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, encontre todas as curvas diferenciáveis tais que a reta tangente em um ponto (x,y) passa por (a,b).

31. **(A braquistócrona)** Em 1696, Johann Bernoulli propõe o seguinte problema: determinar a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo. Note que o problema não é determinar o caminho mais curto e sim a trajetória percorrida em menor tempo. A curva determinada pela trajetória da partícula é denominada *braquistócrona*, palavra derivada do grego *brakhisto* (o mais curto) e *chronos* (tempo). O problema foi resolvido em 1697 por Jacob Bernoulli, Leibniz, L'Hospital e Newton e tem grande importância na história da matemática.

(a) A velocidade da partícula pode ser obtida igualando-se a energia cinética e a energia potencial, i.e., $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$, onde m é a massa da partícula e g a constante gravitacional. Conclua que $v = \sqrt{2gy}$.

(b) O *Princípio de Fermat* diz que a trajetória que minimiza tempo entre dois pontos é a da luz, logo, se θ é o ângulo entre a vertical e a trajetória, então $\frac{\operatorname{sen}\theta}{v} = \frac{1}{v}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{v_m}$, com v_m constante. Isso implica que a trajetória mínima começa sempre com tangente vertical. Admitindo que a partícula parta da origem e atinja seu ponto mínimo em um ponto de ordenada $-D$, com $D > 0$, temos $v_m = \sqrt{2gD}$.

(c) Usando o fato que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, conclua que $v_m^2 dx^2 = v^2 ds^2 = v^2(dx^2 + dy^2)$ e $dx = \frac{v\,dy}{v_m^2 - v^2}$. Mostre que

$$dx = \sqrt{\frac{y}{D-y}}\,dy,$$

e conclua que $y' = \sqrt{\frac{D-y}{y}}$. A equação acima implica que $x = \int \sqrt{\frac{y}{D-y}}\,dy$.

(d) Faça a mudança de variável $y = \frac{D}{2}(1-\cos\theta) = D\operatorname{sen}^2(\theta/2)$, determine uma parametrização para o gráfico da solução da equação obtida no ítem anterior e esboce esta solução. A curva solução do problema também é chamada de *ciclóide*.

32. **(A tautócrona)** Em 1659, o físico holandês Christian Huygens propõe o seguinte problema: determinar uma curva plana na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar sem fricção em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida. Este problema é chamado de *problema da tautócrona* ou *isócrona*, do do grego *tautos* (mesmo), *chronos* (tempo).

    (a) Como no primeiro ítem do exercício anterior, se $s = s(t)$ é o comprimento de arco da curva, então sua altura y deve ser proporcional à velocidade da partícula, i.e., $y(s) = s^2$, escolhendo unidade de medida adequadas. Logo, $y(s) = s^2$. Disso, $dy = 2sds$ e $dy^2 = 4s^2ds^2 = 4y(dx^2 + dy^2)$, logo, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}}$, portanto,

    $$x = \int \frac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}}dy.$$

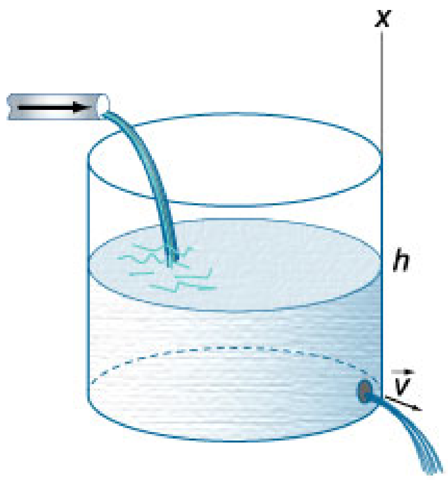
    (b) Faça $u = \sqrt{y}$ e mostre que $x = \dfrac{1}{2}u\sqrt{1-4u^2} + \dfrac{1}{4}\arcsin(2u)$ e $y = u^2$. Fazendo $\theta = \arcsin(2u)$, conclua que

    $$x(\theta) = \frac{1}{8}(2\theta + \operatorname{sen}(2\theta))\,,\ y(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$$

    é uma parametrização para a curva solução do problema. Observe que, a menos de parametrização, a solução do problema da tautócrona também é uma ciclóide.

✰ Escoamento de fluídos

33. **(Lei de Torricelli)** O físico italiano Evangelista Torricelli estabeleceu em 1643 que a vazão com que um líquido escoa de um tanque por um orifício situado a uma distância h da superfície do líquido é proporcional à $\sqrt{2gh}$, onde g denota a aceleração da gravidade.



Denotando por $V = V(t)$ o volume de água dentro do tanque no tempo t, temos que $\dfrac{dV}{dt} = k\sqrt{h}$, k constante. Mostre que se a altura inicial do líquido em relação ao orifício é h_0 então a altura do líquido $h(t)$, conhecida a vazão $V(t)$, em um tempo t qualquer, é solução da equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = k\frac{\sqrt{2gh}}{dV/dh},\ h(0) = h_0.$$

34. Determine, em função da constante k do ítem anterior, o tempo necessário para esvaziar um tanque cilíndrico de raio R e altura h_0, cheio de água, admitindo-se que a água escoe através de um orifício, situado na base do tanque.

☆ **Respostas**

(1) $Q(t) = 100e^{-0,2828t}$, $\tau \approx 24,5$ dias; (2) (a) 13,2 anos; (b) 29,6 mg; (3) Aproximadamente 20 dias; (4) Aproximadamente 672.4 anos; (5) (a) Entre 1260$A.D.$ e 1390$A.D.$; (b) 2300$A.C.$;

(7) (a) Aproximadamente 13,87 anos; (b) A do banco **B**; (8) A proposta (B); (9) Aproximadamente 49.320 reais; (10) 21,97 anos; (11) Pelo menos 14,2 anos; (12) 70 meses;

(13) (a) Basta observar que a variação da quantidade de sal no reservatório é a quantidade de sal que entra menos a quantidade de sal que sai no mesmo, por unidade de tempo;
(b) $x(t) = cV(1 - e^{-at/V})$; (c) A concentração de sal $x(t)/V$ no reservatório tende para c quando $t \to \infty$

(14) (b) Se $\alpha = a_+ - a_- \neq 0$, a solução é $x(t) = (a_+ct + bV^{1-(a_-/\alpha)})(V + \alpha t)^{a_-/\alpha}$ e se $a_+ = a_- = a$, a solução é $x(t) = (a_+ct + bV)e^{-\alpha t/V}$; (c) A concentração de sal $x(t)/V$ no reservatório tende para zero quando $t \to \infty$

(15) (a) x satisfaz $x' = -4x(100+2t)^{-1}$, $x(0) = 30$, logo, $x(t) = 3\cdot 10^5(100+2t)^{-2}$; $c(t) = x(t)/(100+2t) = 3\cdot 10^5(100+2t)^{-3}$; (b) $c(35) \approx 0,061 g/l$;

(16) (a) x satisfaz $x' = 0,1-2x(2000-t)^{-1}$, $x(0) = 40$, logo, $x(t) = 0,1(96\cdot 10^8(2000-t)^{-2} - (2000-t))$; $c(t) = x(t)/(2000-t) = 0,1(96\cdot 10^8(2000-t)^{-3} - 1)$; (b) Tem-se que $x'(t) < 0$ para qualquer $t \in (0,2000)$, logo, a quantidade de soluto decresce ao longo do tempo e consequentemente, a concentração aumenta.

(17) (a) x satisfaz $x'+0,01x = 300$, $x(0) = 2000$, logo, $x(t) = 10^3(30-28e^{-t/100})$; (b) A concentração tende à 10 g/l.

(18) (a) x satisfaz $x' + (0,833\cdot 10^{-3})x = 4\cdot 10^{-3}$, $x(0) = 0$, logo, $x(t) = 48(1 - e^{t/12000})$ e $c(t) = x(t)/1200 = 0,04(1 - e^{t/12000})$; (b) 30 minutos.

(19) (a) $p(t) = p_0e^{\lambda t}$; (b) $p(t) = \dfrac{N}{1 + \frac{N-p_0}{p_0}e^{-\lambda t}}$, onde λ é a constante de proporcionalidade; (c) Tende a N; (d) Basta derivar a equação satisfeita por p; (d) $p(t) = p(0)e^{-be^{at}}$, onde λ é a constante de proporcionalidade e $b = \lambda/a$; (e) $p(t) = \dfrac{\varepsilon}{\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{p_0}\right)e^{\varepsilon t} - \lambda}$. A população pode "explodir"em tempo finito! ($t = \varepsilon^{-1}\ln\left(\lambda/\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{p_0}\right)\right)$)).

(20) (a) $T(t) = (T_0 - T_a)e^{-ct} + T_a$; (b) Tende a T_a; (c) $T(t) = \dfrac{T_0 - T_{a,0}}{1+A}e^{-c(1+A)t} + \dfrac{T_{a,0} + AT_0}{1+A}$;
(d) Tende para a temperatura de equilíbrio $\overline{T} = \dfrac{m_ac_aT_{a,0} + mcT_0}{m_ac_a + mc}$, que pode ser vista como uma *média ponderada* de temperaturas.

(21) $T(t) = 75e^{-0,029t} + 25$; depois de, aproximadamente, 38 minutos;

(22) $T(t) = (100 - 3,124)e^{-0,0102t} - 3,124$; $T_a = -3,124^{\circ}$C, aproximadamente;

(23) (a) $A = 0,5$, $c = 0,061$; $T(t) = (100/3)(e^{-0,0916t} + 1)$; após 15,13 minutos, aproximadamente;
(b) $66,66^{\circ}$C, aproximadamente;

(25) Aproximadamente 8 minutos;

(26) (b) $y = a\ln\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2-x^2} = a\,\text{arcsech}(x/a) - \sqrt{a^2-x^2}$

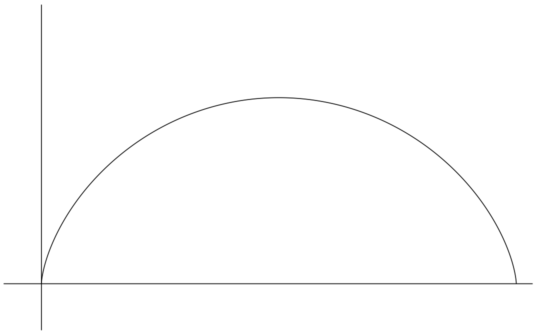
(27) (b) $y = (\cosh(cx)-1)/c$; (28) (c) $u = \dfrac{1}{2}\left((x/a)^c - (a/x)^c\right)$;

(d) $y(x) = (a/2)\left(\frac{1}{c+1}(x/a)^{c+1} + \frac{1}{c-1}(a/x)^{c-1}\right) - \frac{ac}{c^2-1}$, se $c \neq 1$ e

$y(x) = (1/2)\left((x^2/2a) - a\ln x\right) - (1/2)((a/2) - a\ln a)$ se $c = 1$;

(e) Se $c \geq 1$, o gato nunca alcança o rato; se $c < 1$ o gato encontra o rato no ponto $\left(0, \dfrac{av\omega}{\omega^2 - v^2}\right)$.

(31) (d) $x(\theta) = \frac{D}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y(\theta) = \frac{D}{2}(1-\cos\theta)$; para $D > 0$ temos



(33) Nos problemas usuais, temos que o volume de água dentro do tanque depende de h, que por sua vez depende de t, logo, $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh}\dfrac{dh}{dt}$, portanto, $\dfrac{dV}{dh}\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{dV}{dt} = k\sqrt{h}$, o que nos leva à equação dada.

(34) $t = -\dfrac{\pi R^2}{k}\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$;