Questão 1 Determine as soluções gerais das equações diferenciais ordinárias abaixo (cada ítem vale 1,5 ponto):

(a) $y' = \dfrac{y\cos x - 2xy - ye^{xy}}{xe^{xy} + x^2 - \operatorname{sen} x}$ $\rightsquigarrow$ $\underbrace{(y\cos x - 2xy - ye^{xy})}_{P}dx + \underbrace{(\operatorname{sen} x - x^2 - xe^{xy})}_{Q}dy = 0$

$Q_x = P_y$ $\therefore$ A EQ. É EXATA.

POTENCIAL $\begin{cases} f_x = y\cos x - 2xy - ye^{xy} \\ f_y = \operatorname{sen} x - x^2 - xe^{xy} \end{cases}$

$\therefore$ $f(x,y) = y\operatorname{sen} x - x^2y - e^{xy}$

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO

$y\operatorname{sen} x - x^2y - e^{xy} = C$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) $(1+x^2)(4y^3 + 3\operatorname{sen} y)y' = \operatorname{arctg} x$

$(4y^3 + 3\operatorname{sen} y)y' = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$ (EQ. SEPARÁVEL)

$\therefore$ $y^4 - 3\cos y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C$, $C \in \mathbb{R}$

(c) $y' + xy - xy^3 = 0$ (EQ. DE BERNOULLI)

$$y'y^{-3} + xy^{-2} = x$$

MUDANÇA DE VARIÁVEL

$$u = y^{-2}$$

$$u' = -2y^{-3}y'$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2}u' + xu = x$$

$$u' - 2xu = -2x$$

F. INT. $e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$

MULTIPLICANDO POR e^{-x^2}, TEMOS

$$\left(e^{-x^2}u\right)' = -2xe^{-x^2} \quad \therefore$$

$$e^{-x^2}u = \int -2xe^{-x^2}dx = e^{-x^2} + C$$

$$\therefore \quad u(x) = 1 + Ce^{x^2}$$

LOGO,

$$y = u^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + Ce^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

SOLUÇÃO GERAL

$$y = \left(1 + Ce^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) $(1+x^2)y' - x(1-y) = 0$

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2}$$ (EQ. LINEAR DE 1ª ORDEM)

F. INT. $e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

MULTIPLICANDO A EQ. PELO FATOR INTEGRANTE, TEMOS

$$\left\{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}y\right\}' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore \quad (1+x^2)^{\frac{1}{2}}y = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \qquad u = 1+x^2$$

$$= \int \frac{du/2}{\sqrt{u}}$$

$$= \sqrt{u} + C$$

$$= \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\therefore \quad y = 1 + C(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Questão 2 Resolva os seguintes problemas de valor inicial (cada ítem vale 1,5 ponto):

1. $xyy' + x^2 - y^2 = 0,\ y(1) = 1$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{y}{x} - \frac{1}{y/x}$$ (EQ. HOMOGÊNEA)

FAZENDO $u = y/x$, TEMOS

$$y' = xu' + u$$

$$\therefore\ xu' + u = u - \frac{1}{u}$$

$$uu' = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{u^2}{2} = -\ln|x| + C$$

$$u^2 = -2\ln|x| + C$$

$$\therefore\ y^2 = x^2(C - 2\ln|x|)$$

ASSIM, $y = \pm\sqrt{x^2(C - 2\ln|x|}$

$y = \pm|x|\sqrt{C - 2\ln|x|}$, CER.

COMO $y(1) = 1$, ENTÃO

$$1 = 1(C - 2\ln 1)\ \therefore\ \underline{C = 1}$$

LOGO,

$$y = \pm|x|\sqrt{1 - 2\ln|x|}$$

2. $\underbrace{(3y^2 + 2xy)}_{P}dx - \underbrace{(2xy + x^2)}_{Q}dy = 0,\ y(2) = -1$

$$Q_x = -2y - 2x$$

$$\therefore$$

$$P_y = 6y + 2x$$

$$\frac{Q_x - P_y}{Q} = \frac{-4(2y + x)}{-x(2y + x)} = \frac{4}{x}$$

F. INT. $u(x) = e^{-\int \frac{4}{x}dx} = x^{-4}$

$$(3x^{-4}y^2 + 2x^{-3}y)dx + (-2x^{-3}y - x^{-2})dy = 0$$

POTENCIAL

$$\begin{cases} f_x = 3x^{-4}y^2 + 2x^{-3}y \\ f_y = -2x^{-3}y - x^{-2} \end{cases}$$

$$\therefore$$

$$f(x,y) = -x^{-3}y^2 - x^{-2}y$$

SOLUÇÃO GERAL

$$-x^{-3}y^2 - x^{-2}y = C$$

COMO $y(2) = -1$, ENTÃO

$$-2^{-3}(-1)^2 - 2^{-2}(-1) = C$$

$$-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = C\ \therefore\ C = \frac{1}{8}$$

SOLUÇÃO

$$\boxed{-x^{-3}y^2 - x^{-2}y = \frac{1}{8}}$$

Questão 3 (1,5 ponto) Esboce o plano de fase da equação $xy' + 3y = 3$.

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{3}{x} \quad \text{(EQ. LINEAR DE 1ª ORDEM)}$$

F. INT. $e^{\int 3/x \, dx} = x^3$

$\therefore \ (x^3y)' = 3x^2 \Rightarrow x^3y = x^3 + C \ \therefore$

$$\boxed{y = 1 + \frac{C}{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

ANÁLISE DAS SOLUÇÕES

$C = 0$: SOLUÇÃO CONSTANTE $y \equiv 1$.

$C \neq 0$: * SOLUÇÕES TÊM SINGULARIDADE EM $x = 0$.

* $\lim_{|x| \to +\infty} y(x) = 1$

* SE $C > 0$, ENTÃO $\lim_{x \to 1^{\pm}} y(x) = \pm\infty$

* SE $C < 0$, ENTÃO $\lim_{x \to 1^{\pm}} y(x) = \mp\infty$

* COMO $y' = -3Cx^{-4}$, E $y'' = 12Cx^{-5}$, SEGUE QUE y É CRESCENTE OU DECRESCENTE SE $C > 0$ OU $C < 0$ E SUA CONCAVIDADE TAMBÉM DEPENDE DE C.