Questão 1 Determine as soluções gerais das equações diferenciais ordinárias abaixo (cada ítem vale 1 ponto):

(a) $y'''' + 2y''' - 3y'' = 0$

EQ. CARACTERÍSTICA : $\lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+3) = 0$

RAÍZES $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$

SOLUÇÃO GERAL

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x} + C_4 e^{-3x} \quad , \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

(b) $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$

EQ. CARACTERÍSTICA : $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 5 = 0$

$(\lambda+1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) = 0$

$(\lambda+1)(\lambda-(-2+i))(\lambda-(-2-i)) = 0$

RAÍZES $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2+i$, $\lambda_3 = -2-i$

SOLUÇÃO GERAL

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \cos x + C_3 e^{-2x} \operatorname{sen} x \, , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} .$$

Questão 2 Um investidor decide aplicar 10.000 reais em um fundo de rendimento **A** que rende 9% ao ano, com composição contínua. O fundo retém 20% do rendimento obtido a título de pagamento de impostos.

(a) **(1,5 ponto)** Determine a expressão para o capital após t anos.

TAXA REAL $= 0{,}09 - 0{,}09 \cdot 0{,}2 = 0{,}09 - 0{,}018 = 0{,}072$

$\therefore$ O CAPITAL $C(t)$ APÓS t ANOS SATISFAZ $C'(t) = 0{,}072\, C(t)$,

$C(0) = 10.000 \quad \therefore$

$$\underline{\underline{C(t) = 10.000\, e^{0{,}072t}}}, \quad t \geq 0.$$

(b) **(1,5 ponto)** Suponha que o investidor receba a proposta de outro fundo **B** que rende 7,5% ao ano, com composição contínua, sem incidência de impostos. Qual dos dois fundos é mais vantajoso? Calcule o capital depois de 3 meses em cada um dos fundos.

$C_A(t)$: CAPITAL APLICADO NO FUNDO A, APÓS t ANOS

$C_B(t)$: CAPITAL APLICADO NO FUNDO B, APÓS t ANOS

$C_A(t) = 10.000\, e^{0{,}072t}$

$C_B(t) = 10.000\, e^{0{,}075t} \quad \therefore$ O FUNDO $\underline{B}$ É MAIS VANTAJOSO

3 MESES $= \frac{3}{12}$ ANO $= \frac{1}{4}$ ANO $\therefore$

$C_A\left(\frac{1}{4}\right) = 10.000\, e^{\frac{0{,}072}{4}} = 10.000\, e^{0{,}018} \cong 10.181{,}63$ R\$

$C_B\left(\frac{1}{4}\right) = 10000\, e^{\frac{0{,}075}{4}} = 10.000\, e^{0{,}01875} \cong 10.189{,}27$ R\$

Questão 3 Determine as trajetórias ortogonais às famílias de curvas abaixo (cada ítem vale 1,5 ponto):

(a) $y = Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}$

$$y' = 2Cxe^{x^2} \; ; \text{ MAS } C = ye^{-x^2} \therefore y' = 2(ye^{-x^2})xe^{x^2} = 2xy .$$

ASSIM, A FAMÍLIA DE TRAJETÓRIAS ORTOGONAIS SATISFAZ

$$y' = \frac{-1}{2xy} .$$

$$\therefore 2yy' = -\frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = -\ln|x| + A \therefore$$

$$e^{y^2} = e^{-\ln|x|} \cdot e^{A} = \frac{1}{|x|} e^{A} = \frac{\pm e^{A}}{x} = \frac{B}{x}$$

$$\therefore \boxed{x = Be^{-y^2} \; , \; B \in \mathbb{R}}$$

(b) $y = C\text{sen}x, x \in \mathbb{R}$

$$y' = C\cos x, \text{ MAS } C = \frac{y}{\text{sen}\, x} \therefore y' = \frac{y}{\text{sen}\, x} \cdot \cos x$$

$$y' = \frac{y}{\text{tg}\, x} .$$ A FAMÍLIA DE TRAJETÓRIAS ORTOGONAIS SATISFAZ $y' = -\frac{\text{tg}\, x}{y} \Rightarrow yy' = -\text{tg}$

$$\therefore \frac{y^2}{2} = -\int \text{tg}\, x \, dx + A = -\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} dx + A = \ln|\cos x| +$$

ASSIM,

$$\text{T.O.}: \boxed{\frac{y^2}{2} - \ln|\cos x| = A, \; A \in \mathbb{R}}$$

Questão 4 Suponha que uma sala contenha 2.400 litros de ar originalmente isento de monóxido de carbono. Um fumante desavisado entra fumando na sala, e, a partir de então, fumaça de cigarro contendo 5% de monóxido de carbono é introduzida na sala com uma vazão de 0,2 l/min. O sistema de ventilação retira da sala a mistura gasosa homogênea com a mesma vazão.

(a) **(1,5 ponto)** Determine expressões para a quantidade e para a concentração de monóxido de carbono no aposento para $t > 0$.

$V = 2400\,\ell$

$a_+ = 0{,}2\ \ell/\text{min}$

$a_- = 0{,}2\ \ell/\text{min}$

$c = 0{,}05$

$x(t)$: QUANTIDADE DE CO_2 NA SALA

$x(0) = 0$

$x' = a_+ c - \dfrac{a_- x}{V}$

$x' = 0{,}2 \cdot 0{,}05 - \dfrac{0{,}2\,x}{2400}$

$x' + \overbrace{\dfrac{1}{12000}}^{\alpha} x = 0{,}01$

$\left(e^{\alpha t} x(t)\right)' = 0{,}01\, e^{\alpha t}$

$\therefore\ e^{\alpha t} x(t) = \dfrac{0{,}01}{\alpha} e^{\alpha t} + C \Rightarrow x(t) = 120 + Ce^{-t/12000}$

$x(0) = 0 \Rightarrow C = -8{,}33 \cdot 10^{-7} \rightarrow \boxed{x(t) = 120\left(1 - e^{-t/12000}\right)}$

(b) **(1,5 ponto)** A exposição prolongada a concentrações de monóxido de carbono maiores do que 0,012% é prejudicial à saúde. Determine o intervalo de tempo após o qual esta concentração é atingida.

CONTINUAÇÃO DE (a)

A CONCENTRAÇÃO $C(t)$ É

$C(t) = \dfrac{x(t)}{V} = \dfrac{120 \cdot \left(1 - e^{-t/12000}\right)}{2400}$

$\therefore\ \boxed{C(t) = 0{,}05\left(1 - e^{-t/12000}\right)\%}$

P/ QUE $C(t) > 0{,}012\%$,

DEVEMOS TER

$0{,}05\left(1 - e^{-t/12000}\right) > 0{,}00012$

$\therefore\ t > 28{,}83$ MINUTOS,

APROXIMADAMENTE.