Questão 1 Determine as soluções gerais das equações diferenciais ordinárias abaixo (cada item vale 1 ponto):

(a) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ (EQ. DE EULER)

$x = e^z \Rightarrow y'' + 2y' + y = 0$

EQ. CARACTERÍSTICA $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

$\therefore y_1 = e^{-z} = x^{-1}$, $y_2 = ze^{-z} = x^{-1}\ln x$

SOLUÇÃO GERAL

$$y = C_1x^{-1} + C_2x^{-1}\ln x = x^{-1}(C_1 + C_2\ln x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(b) $x^2y'' + xy' + y = 0$ (EQ. DE EULER)

$x = e^z \rightarrow y'' + y = 0$

EQ. CARACTERÍSTICA $\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

$\therefore y_1 = \cos z = \cos(\ln x)$, $y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$

SOLUÇÃO GERAL

$$y = C_1\cos(\ln x) + C_2\operatorname{sen}(\ln x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Questão 2 (a) **(2 pontos)** Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$$

no intervalo $(0,\infty)$, sabendo que $y_1 = x$ é solução particular desta equação.

$y_1 = x$

$y_2 = v y_1$

$$y'' - \frac{(x+2)}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 0$$

$$v'' + \left(-\frac{(x+2)}{x} + 2\cdot\frac{1}{x}\right)v' = 0$$

$$v'' + \left(\frac{-x-2+2}{x}\right)v' = 0$$

$$v'' - v' = 0$$

FAZENDO $u = v'$, $u' - u = 0$ $\therefore$ $u = Ce^x$, LOGO,

$v = \int Ce^x\,dx = Ce^x + D$. PODEMOS TOMAR $C = 1$ E

$D = 0$, OBTENDO $v = e^x$ $\therefore$ $y_2 = vy_1 = xe^x$.

SOLUÇÃO GERAL

$y = C_1 x + C_2 x e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) **(2 pontos)** Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = \cancel{x^2 \ln x}\ x^4 e^{-x},$$

no intervalo $(0,\infty)$.

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = x^2 e^{-x}$$

$y_1 = x$

$y_2 = xe^x$

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & (x+1)e^x \end{vmatrix} = x(x+1)e^x - xe^x = x^2e^x.$$

FÓRMULA DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

$$y_p = \left(-\int \frac{xe^x \cdot x^2 e^{-x}}{x^2 e^x}\,dx\right)\cdot x + \left(\int \frac{x \cdot x^2 e^{-x}}{x^2 e^x}\,dx\right) xe^x$$

$$= \underbrace{\left(-\int xe^{-x}\,dx\right)}_{\star}\cdot x + \underbrace{\left(\int xe^{-2x}\,dx\right)}_{\star\star}\cdot xe^x$$

$\star$ $$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$\star\star$ $$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \int -\frac{e^{-2x}}{2}\,dx = \frac{-xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} +$$

$\therefore$ SOL. GERAL

$$y = -e^{-x}(x+1)\cdot x - \frac{x}{2}e^{-x}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C_1x + C_2xe^x,\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$= xe^{-x}\left(\frac{6x-5}{4}\right) + C_1x + C_2xe^x.$$

Questão 3 (4 pontos) Determine a solução geral da equação diferencial

$$xy'' - y' + (1-x)y = \cancel{xe^x(1-2x)} \quad x^2e^x$$

no intervalo $(0, \infty)$.

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{1-x}{x} y = xe^x$$

$y_1 = e^x$ É SOLUÇÃO DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1-x}{x}y = 0 \quad .$$

REDUÇÃO DE ORDEM $\quad y_2 = vy_1, \quad v'' + \left(-\frac{1}{x} + 2\frac{e^x}{e^x}\right)v' = 0$

$$v'' + \left(2 - \frac{1}{x}\right)v' = 0, \quad u' = v \Rightarrow \quad u' + \left(2 - \frac{1}{x}\right)u = 0$$

$$\therefore \frac{u'}{u} = \frac{1}{x} - 2 \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln x - 2x + C$$

$$u = Cxe^{-2x}$$

$$v = C\int xe^{-2x}\,dx = C\left(\frac{xe^{-2x}}{2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\right) = C\left(\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2x}}{-2} + D\right)$$

$$= e^{-2x}(2x+1), \text{ com } C = -4,\ D = 0.$$

$$\therefore y_2 = vy_1 = e^{-x}(2x+1)$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x}(2x+1) \\ e^x & e^{-x}(-2x+1) \end{vmatrix} = -2x+1-(2x+1) = -4x$$