Questão 1 Determine as soluções das equações diferenciais ordinárias abaixo (cada ítem vale **1 ponto**):

(a) $y' = \dfrac{2x}{y + x^2 y}$, $y(0) = 1$

$$yy' = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{(EQ. SEPARÁVEL)}$$

$$\therefore \frac{1}{2}y^2 = \ln(1+x^2) + C$$

FAZENDO $y(0)=1$, TEMOS $\frac{1}{2} = C$ $\therefore$ A SOLUÇÃO É DADA IMPLICITAMENTE POR

$$\boxed{y^2 = 2\ln(1+x^2) + 1}$$

(b) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$

EQ. CARACTERÍSTICA $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i$

SOLUÇÃO GERAL $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)$

$$\therefore \begin{cases} C_1 = 1 \\ -2C_1 \cdot 0 + 2C_2 \cdot 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 1/2$$

$\therefore$ SOLUÇÃO $\boxed{y = \cos 2x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x}$

Questão 2 **(4 pontos)** Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2y'' + 7xy' + 5y = \text{[redacted]}\ x^2 + 1$$

no intervalo $(0, \infty)$.

EQ. HOMOGÊNEA $\quad x^2y' + 7xy' + 5y = 0$ (EQ. DE EULER)

$x = e^z \Rightarrow y'' + 6y' + 5 = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \therefore$

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -5$, ASSIM,

$y_1 = e^{-z} = x^{-1}$ E $y_2 = e^{-5z} = x^{-5}$

SÃO SOLUÇÕES L.I. DA EQ. HOMOGÊNEA.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-5} \\ -x^{-2} & -5x^{-6} \end{vmatrix} = -5x^{-7} + x^{-7} = -4x^{-7}. \qquad f''$$

CUIDADO!

$$y'' + \frac{7}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = 1 + \frac{1}{x^2}$$

FÓRMULA DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

$$y_p = \left(-\int \frac{x^{-5}(1+x^{-2})}{-4x^{-7}}dx\right)\cdot x^{-1} + \left(\int \frac{x^{-1}(1+x^{-2})}{-4x^{-7}}dx\right)\cdot x^{-5}$$

$$= -\frac{1}{4}x^{-1}\int (x^2+1)\,dx - \frac{1}{4}x^{-5}\cdot\int (x^6 + x^{-4})\,dx$$

$$= -\frac{x^{-1}}{4}\left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \frac{x^{-5}}{4}\left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^{-3}}{-3}\right) = \frac{x^{-8}}{12} - \frac{5x^2}{42} - \frac{1}{4}$$

SOLUÇÃO GERAL

$$y = \frac{x^{-8}}{12} - \frac{5x^2}{42} - \frac{1}{4} + C_1x^{-1} + C_2x^{-5}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Questão 3 **(2 pontos)** Determine a solução geral da equação diferencial

$$\underbrace{(3xy+y^2)}_{P}dx+\underbrace{(x^2+xy)}_{Q}dy=0.$$

$$Q_x = 2x+y$$
$$P_y = 3x+2y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_x - P_y}{Q} = \frac{-x-y}{x(x+y)} = -\frac{1}{x}$$

FATOR INTEGRANTE

$$u(x) = e^{-\int -\frac{dx}{x}} = x$$

$\therefore$ MULTIPLICANDO A EQUAÇÃO POR x,

$$(3x^2y + xy^2)\,dx + (x^3 + x^2y)\,dy = 0$$

DEVEMOS ENCONTRAR $f = f(x,y)$ TAL QUE

$$\begin{cases} f_x = 3x^2y + xy^2 \\ f_y = x^3y + x^2y \end{cases} \Longrightarrow f(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2$$

AS SOLUÇÕES SÃO DADAS IMPLICITAMENTE POR

$$\boxed{x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C}$$

Questão 4 (2 pontos) Determine a solução geral da equação diferencial

$$xy'' - (x+2)y' + 2y = 0 \quad \longrightarrow \quad y'' - \left(1+\frac{2}{x}\right)y' + \frac{2}{x}y = 0$$

no intervalo $(0, \infty)$.

$y_1 = e^x$ É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO. P/ QUE $y_2 = v y_1$

SEJA SOLUÇÃO, DEVEMOS TER

$$v'' + \left(-1 - \frac{2}{x} + 2 \cdot \frac{e^x}{e^x}\right) v' = 0$$

$$v'' + \left(1 - \frac{2}{x}\right) v' = 0$$

$v' = u \Rightarrow \quad u' + \left(1 - \frac{2}{x}\right) u = 0 \rightarrow \quad \frac{u'}{u} = \frac{2}{x} - 1$

$\therefore \quad \ln|u| = 2\ln|x| - x + C \quad \therefore \quad u = Cx^2e^{-x}$

$$v = \int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - \int 2x(-e^{-x})\,dx$$

$$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$$

$$= -x^2e^{-x} + 2\left\{-xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx\right\}$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)^2e^{-x}$$

$\therefore \quad y_2 = -(x+1)^2 e^{-x} \cdot e^x = -(x+1)^2$

SOLUÇÃO GERAL $\quad y = C_1e^x + C_2(x+1)^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$