Questão 1 (2 pontos) Determine as equações reduzidas das cônicas descritas abaixo:

(a) Hipérbole de centro na origem, focos sobre o eixo x, assíntotas $y = \pm 3x/\sqrt{7}$ e distância focal 2.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad , \quad c = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad b = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{7/16} - \frac{y^2}{9/16} = 1}$$

(b) Elipse de excentricidade 1/2 com eixo menor medindo 10, centro no ponto (2, 1) e focos sobre a reta $y = 1$.

$$e = 1/2 \rightsquigarrow a = 2c \quad , \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad b = 5 \Longrightarrow a = 10/\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \frac{(x-2)^2}{100/3} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{4/3} - (y-1)^2 = 1}$$

(c) **Parábola de vértice $(-1,1)$, foco sobre a reta $y=1$ e reta diretriz $x=-2$.**

$$x+1 = 4p(y-1)^2 \quad , \quad p=1$$

$$\boxed{x+1 = 4(y-1)^2}$$

(d) **Hipérbole de centro no ponto $(-1,5)$, focos sobre ~~o eixo y~~ a reta $x=-1$, assíntotas $x=y-6$ e $x=-y+4$ e distância focal 4.**

ASSÍNTOTAS

$$\frac{x+1}{y-5} = 1 \quad , \quad \frac{x+1}{y-5} = -1 \quad \therefore \quad \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$

$$c = 2 \quad \therefore \quad c^2 = a^2 + b^2$$

$$4 = 2a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2} = b$$

EQ. DA HIPÉRBOLE

$$\frac{(y-5)^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(x+1)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{(y-5)^2}{2} - \frac{(x+1)^2}{2} = 1}$$

Questão 2 (5 pontos) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a equação

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 - 4\sqrt{5}x - 3\sqrt{5}y + \alpha = 0$$

nas variáveis x e y. Determine, em função de α, que tipo de cônica esta equação representa, calcule todos os seus elementos (comprimento de eixos, assíntotas, a, b, c, ε, p, etc, se houver), determine seus eixos principais e faça um esboço da mesma. Não poupe detalhes!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$, AUTOVALORES: $\lambda^2 + 5\lambda - 50 = 0$

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -10$

AUTOVETORES: $A\vec{u_1} = \lambda_1 \vec{u_1}$, $A\vec{u_2} = \lambda_2 \vec{u_2}$ $\Rightarrow$ $\vec{u_1} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{u_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

MUDANÇA DE COORDENADAS $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{x} - 2\bar{y}) \end{cases}$$

ÂNGULO DE ROTAÇÃO $\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $90° < \theta < 180°$

SUBSTITUINDO NA EQUAÇÃO DADA:

$$5\bar{x}^2 - 10\bar{y}^2 - 4\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-2\bar{x} - \bar{y})\right) - 3\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{x} - 2\bar{y})\right) + \alpha = 0$$

$$5\bar{x}^2 - 10\bar{y}^2 + 5\bar{x} + 10\bar{y} + \alpha = 0$$

$$5\left(\bar{x}^2 + \bar{x} + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4} - 10\left(\bar{y}^2 - \bar{y} + \frac{1}{4}\right) + \frac{10}{4} + \alpha = 0$$

$$5\left(\bar{x} + 1/2\right)^2 - 10\left(\bar{y} - 1/2\right)^2 = -\left(\frac{5}{4} + \alpha\right)$$

$$\frac{(\bar{y} - 1/2)^2}{\frac{5/4 + \alpha}{10}} - \frac{(\bar{x} + 1/2)^2}{\frac{5/4 + \alpha}{5}} = 1 \quad , \quad \alpha \neq -5/4$$

$\underline{\alpha = -5/4}$: A EQUAÇÃO REPRESENTA UM PAR DE RETAS CONCORRENTES QUE SE CRUZAM EM $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$5\left(\bar{x}+\tfrac{1}{2}\right)^2 - 10\left(\bar{y}-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\bar{x}+\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\bar{y}-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(\left(\bar{x}+\tfrac{1}{2}\right) - \sqrt{2}\left(\bar{y}-\tfrac{1}{2}\right)\right)\left(\left(\bar{x}+\tfrac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\bar{y}-\tfrac{1}{2}\right)\right) = 0$$

$$\therefore \quad \bar{x}+\frac{1}{2} = \pm\sqrt{2}\left(\bar{y}-\frac{1}{2}\right)$$

$\underline{\text{P/ } \alpha > -5/4}$: $\frac{5}{4}+\alpha > 0 \therefore$ A EQUAÇÃO REPRESENTA UMA HIPÉRBOLE DE CENTRO $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $a = \sqrt{\dfrac{\frac{5}{4}+\alpha}{10}}$,

$$b = \sqrt{\frac{5/4+\alpha}{5}}, \quad c^2 = a^2+b^2 = \frac{\frac{5}{4}+\alpha}{10} + \frac{\frac{5}{4}+\alpha}{5} = \frac{3}{10}\left(\frac{5}{4}+\alpha\right)$$

$\therefore \quad c = \sqrt{\dfrac{3}{10}\left(5/4+\alpha\right)}$. AS ASSÍNTOTAS SÃO $\dfrac{y-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} = \pm\dfrac{a}{b} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}$

$\underline{\text{P/ } \alpha < -5/4}$: TOME $\beta = \dfrac{-5/4-\alpha}{5} > 0 \therefore$ A EQUAÇÃO SE ESCREVE COMO

$$\frac{\left(\bar{x}+\frac{1}{2}\right)^2}{\beta} - \frac{\left(\bar{y}-\frac{1}{2}\right)^2}{\beta/2} = 1$$

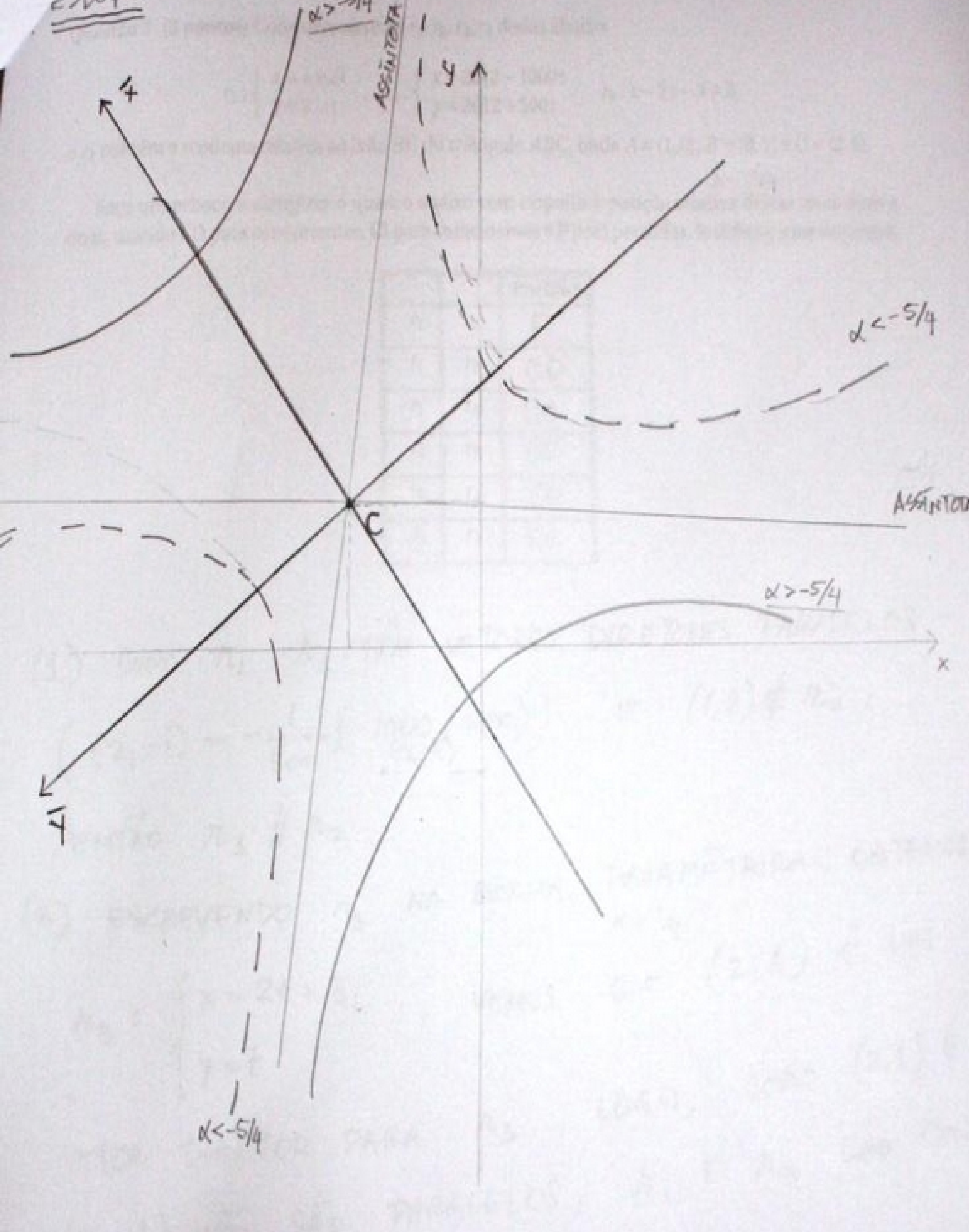
E REPRESENTA UMA HIPÉRBOLE DE CENTRO $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

$a = \sqrt{\beta}$, $b = \sqrt{\beta/2}$, $c = \sqrt{\dfrac{3\beta}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{10}\left(-\frac{5}{4}-\alpha\right)}$ E

ASSÍNTOTAS $\dfrac{y-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} = \pm\dfrac{b}{a} = \pm\sqrt{2}$.

ESBOÇO

$C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Questão 3 **(3 pontos)** Considere as retas r_1, r_2, r_3, r_4 dadas abaixo:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 2012 - 1000t \\ y = 2012 + 500t \end{cases}, \quad r_3 : x - 2y - 3 = 0,$$

e r_4 contém a mediana relativa ao lado BC do triângulo ABC, onde $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ e $C = (2,5)$.

Faça um esboço e complete o quadro abaixo com respeito à posição relativa destas retas duas a duas, usando **CO** para concorrentes, **CI** para coincidentes e **P** para paralelas. Justifique suas respostas.

		Posição
r_1	r_2	P
r_1	r_3	CO
r_1	r_4	CO
r_2	r_3	CO
r_2	r_4	CO
r_3	r_4	CO

(1) COMO r_1, r_2 TÊM VETORES DIRETORES PARALELOS

$\left((2,-1) = -\frac{1}{500}(-1000, 500) \right)$ E $(1,2) \notin r_2$,

ENTÃO $r_1 \parallel r_2$

(2) ESCREVENDO r_3 NA FORMA PARAMÉTRICA, OBTEMOS

$r_3 : \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t \end{cases}$, VEMOS QUE $(2,1)$ É UM

VETOR DIRETOR PARA r_3, LOGO, COMO $(2,1)$ E

$(2,-1)$ NÃO SÃO PARALELOS, r_1 E r_3 SÃO CONCORRENTES.

(3) O PONTO MÉDIO DE BC É $P = (1,3)$, LOGO,

r_4 TEM VETOR DIRETOR $(1-1, 3-0) = (0,3)$ $\therefore$ r_1, r_4

SÃO CONCORRENTES.

(4) $(-1000, 500)$ NÃO É PARALELO A $(2,1)$, LOGO, r_2, r_3 SÃO CONCORRENTES.

(5) $(-1000, 500) \not\parallel (0,3) \therefore r_2$ E r_4 SÃO CONCORRENTES.

(6) $(2,1) \not\parallel (0,3) \therefore r_3$ E r_4 SÃO CONCORRENTES.

ESBOÇO