Questão 1 Considere as retas $r_1 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1-3\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$ e $r_2 : x = \frac{y-1}{2} = 1-z$.

(a) **(1 ponto)** Determine se r_1 e r_2 são coincidentes, paralelas, reversas ou concorrentes.

COMO $r_2 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$, ADMITE $\vec{v_2} = (1,2,-1)$ COMO VETOR DIRETOR E $\vec{v_1} = (0,-3,1)$ É UM VETOR DIRETOR P/ r_1, SEGUE QUE r_1 E r_2 PODEM SER REVERSAS OU CONCORRENTES. SUBSTITUINDO A EXPRESSÃO DE r_1 EM r_2, TEMOS

$$2 = \frac{1-3\lambda-1}{2} = 1-(-1+\lambda) \Rightarrow 2 = -\frac{3}{2}\lambda = 2-\lambda$$

, O QUE É IMPOSSÍVEL $\therefore$ r_1, r_2 SÃO REVERSAS.

(b) **(1 ponto)** Encontre uma equação geral para o plano π_1 que é paralelo a r_1 e contém a reta r_3 : $x-1 = \frac{y+1}{2} = z-1$.

$r_3 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\therefore$ $\vec{v_3} = (1,2,1)$ É VETOR DIRETOR P/ r_3.

COMO $\vec{v_1} = (0,-3,1)$ E $\vec{v_3}$ SÃO L.I., SEGUE QUE $\vec{v_1} \times \vec{v_3}$ É NORMAL A π_1.

$$\vec{v_1} \times \vec{v_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-5,1,3).$$

COMO $P = (0,-3,0) \in r_3 \subset \pi_1$, SEGUE QUE π_1 TEM EQUAÇÃO GERAL

$$-5(x-0) + 1(y+3) + 3(z-0) = 0$$

$$\boxed{\pi_1 : 5x - y - 3z - 3 = 0}$$

(c) **(1 ponto)** Encontre uma equação geral para o plano π_2 que é ortogonal a r_2 e contém o ponto de intersecção de r_1 e r_4: $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$.

- $\pi_2 \perp r_2 \Rightarrow \vec{v_2} \perp \pi_2$, $\vec{v_2} = (1, 2, -1)$.

- $r_1 \cap r_4$: VAMOS SUBSTITUIR AS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE r_1 EM r_4.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - (1 - 3\lambda) = 2 \\ 2 \cdot 2 + (-1 + \lambda) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1$$

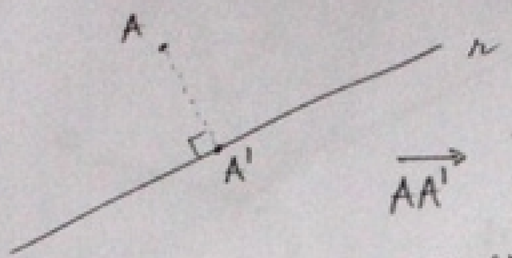
$\therefore$ r_1 E r_4 SE CRUZAM EM $Q = (2, 4, -2)$.

$\therefore$ π_2: $1 \cdot (x-2) + 2(y-4) - 1 \cdot (z+2) = 0$

$$\boxed{\pi_2: x + 2y - z - 12 = 0}$$

Questão 2 Considere os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (2,-1,3)$ e a reta $r : \begin{cases} x+y+3z=3 \\ 2x+2y-7z+7=0 \end{cases}$.

(a) **(1,5 ponto)** Determine a distância de A a r.



SEJA A' O PÉ DA PERPENDICULAR BAIXADA DE A SOBRE r. TEMOS QUE $\overrightarrow{AA'}$ É PERPENDICULAR AO VETOR DIRETOR DE r. TEMOS, ESCALONANDO,

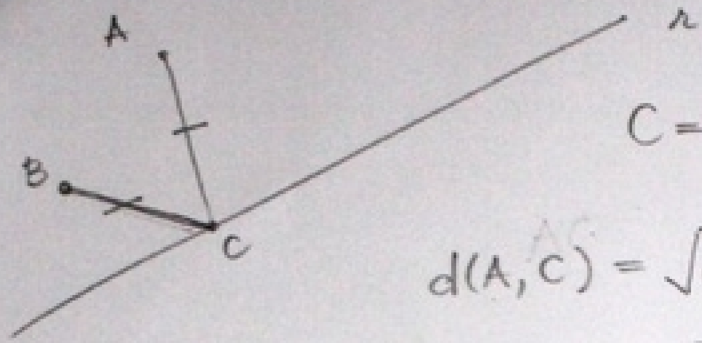
$$r: \begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 13z = 13 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \therefore \vec{v} = (1,-1,0).$$

COMO $A' = (\lambda, -\lambda, 1)$, ENTÃO $\overrightarrow{AA'} = (\lambda-1, -\lambda, 0) \perp (1,-1,0) = \vec{v}$

$\therefore \lambda - 1 - 1\cdot(-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$. LOGO, $A' = (1/2, -1/2, 1)$ E

$$d(A,r) = |\overrightarrow{AA'}|$$
$$= \sqrt{(-1/2)^2 + (1/2)^2 + 0^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) **(1,5 ponto)** Encontre um ponto C sobre r de forma que o triângulo ABC tenha os lados AC e BC congruentes.



$$C = (\lambda, -\lambda, 1)$$

$$d(A,C) = \sqrt{(\lambda-1)^2 + (-\lambda-0)^2 + (1-1)^2}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(\lambda-2)^2 + (-\lambda+1)^2 + (1-3)^2}$$

$$d(A,C) = d(B,C)$$

$$(\lambda-1)^2 + \lambda^2 = (\lambda-2)^2 + (\lambda-1)^2 + 4$$

$$-2\lambda + 1 = -4\lambda + 4 - 2\lambda + 1 + 4$$

$$4\lambda = 8 \rightarrow \lambda = 2$$

$$\therefore \quad C = (2, -2, 1)$$

Questão 3 Seja α um número real fixado e considere o ponto $P = (-1,3,2)$ e as retas

$$r: \begin{cases} x = 3y+1 \\ z-y = 1 \end{cases}$$

e $s: (x,y,z) = (0,4,1) + \lambda(2,\alpha,1)$.

(a) **(1 ponto)** Determine para que valor de α as retas r e s são concorrentes e calcule o seu ponto de intersecção.

$$s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4+\alpha\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \xrightarrow[\text{EM } r]{\text{SUBSTITUINDO}} \begin{cases} 2\lambda = 3(4+\alpha\lambda)+1 \\ (1+\lambda)-(4+\alpha\lambda) = 1 \end{cases}$$

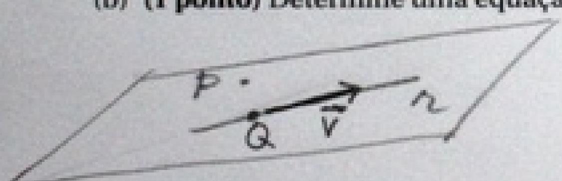
$$\therefore \begin{cases} (2-3\alpha)\lambda = 13 \\ (1-\alpha)\lambda = 4 \end{cases}$$

PARA QUE r, s SEJAM CONCORRENTES, O SIST. DEVE TER UMA ÚNICA SOLUÇÃO λ, O QUE OBRIGA A TERMOS $1-\alpha \neq 0$, $2-3\alpha \neq 0$ E $\dfrac{13}{2-3\alpha} = \dfrac{4}{1-\alpha}$ $\therefore$ $\alpha = 5$.

$\therefore -4\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = -1$.

$\therefore$ PONTO DE INTERSECÇÃO $= (-2,-1,0)$

(b) **(1 ponto)** Determine uma equação geral para o plano que contém r e o ponto P.



$$r: \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

$\therefore$ $\vec{v} = (3,1,1)$ É VETOR DIRETOR P/ r. LOGO,

$Q = (1,0,1) \in r$ E $\overrightarrow{PQ} = (2,-3,-1) \parallel \pi$.

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-5,11) \perp \pi. \therefore$$

$$\pi: -2(x+1) - 5(y-3) + 11(z-2) = 0$$

$$\pi: 2x + 5y - 11z - 9 = 0$$

(c) **(1,5 ponto)** Determine para que valores de β a distância de P ao plano $\pi : 2x + \beta y - 6z - 2 = 0$ é 1.

$P = (-1, 3, 2)$

$$1 = d(P,\pi) = \frac{|2\cdot(-1) + \beta\cdot 3 - 6\cdot 2 - 2|}{\sqrt{2^2 + \beta^2 + (-6)^2}} = \frac{|3\beta - 16|}{\sqrt{\beta^2 + 40}}$$

$$\therefore (3\beta - 16)^2 = \beta^2 + 40 \Rightarrow \beta^2 - 12\beta + 27 = 0 \Rightarrow \underline{\beta = 3 \text{ ou } \beta = 9.}$$

(d) **(1,5 ponto)** Determine uma equação geral para o plano que contém a reta r e é perpendicular ao plano

$$\pi_2 : (x, y, z) = (0, 2, 0) + \lambda\underbrace{(0, 6, -2)}_{\vec{v}} + \mu\underbrace{(1, -3, 1)}_{\vec{w}}.$$

$$\cdot\ \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, -6) \parallel \pi$$

$\cdot\ \vec{v} = (3, 1, 1)$ (VETOR DIRETOR DE r) É $\parallel$ A π.

$$\therefore \vec{n} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4, -18, 6) \perp \pi.$$

COMO $(1, 0, 1) \in r \subset \pi$, TEMOS

$$\pi : 4(x-1) - 18(y-0) + 6(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi : 2x - 9y + 3z - 5 = 0.}$$