UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM111 - Análise II
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 23/05/2013

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ______________________________

ATENÇÃO!

1. Não é permitido consultar livros e/ou anotações, tampouco comunicar-se com os demais alunos durante a prova;
2. Faça a prova a lápis;
3. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 16h;
4. O gabarito estará disponível no site da disciplina após a realização da prova;
5. Você deve escolher questões que somem **10** pontos;
6. Na resolução das questões, você pode utilizar todos os resultados provados em aula, desde que indique claramente qual resultado está utilizando;
7. Você deve justificar suas respostas;
8. Boa prova!

Questão 1 Prove as afirmações abaixo:

(a) **(2 pontos)** Dado $A \subset \mathbb{R}$, uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita *Lipschitziana* se existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

para todos $x, y \in A$. Mostre que se f é Lipschitziana e $X \subset A$ tem medida nula então $f(X)$ tem medida nula.

DADO $\varepsilon > 0$, COMO X TEM MEDIDA NULA, EXISTEM INTERVALOS $I_1, I_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ TAIS QUE $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ E $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon/M$. COMO f É CONTÍNUA, ENTÃO $f(I_n) \subset \mathbb{R}$ É UM INTERVALO (PELO TEO. DO VALOR INTERMEDIÁRIO). SE $x, y \in I_n$ ENTÃO

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M \cdot |I_n|$$

$\therefore |f(I_n)| \leq M|I_n|$, $n \in \mathbb{N}$.

PORTANTO, $\sum_{n=1}^{\infty} |f(I_n)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon$

E $f(X) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} f(I_n)$. ISSO PROVA QUE $f(X)$ TEM MEDIDA NULA.

(b) **(2 pontos)** Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita *contínua por partes* se existem $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ tais que a restrição de f a cada intervalo (x_{j-1}, x_j) é contínua e existem os limites laterais $f(x_j+)$ e $f(x_j-)$ em cada um dos pontos x_j, para cada $j = 1, \ldots, n$. Mostre que f é integrável em cada subintervalo $[a,x] \subset [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$ e a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \ a \leq x \leq b,$$

satisfaz $F'(x) = f(x)$, se $x \in [a,b] \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$, e $F'(x+) = f(x+)$, $F'(x-) = f(x-)$ se $x = x_j$ para algum j. (Aqui, usamos a notação $F'(x+)$ para a *derivada à direita de* F, definida por $F'(x+) = \lim_{h \to 0^+}(F(x+h) - F(x))h^{-1}$ e analogamente para a derivada à esquerda $F'(x-)$.)

COMO O CONJUNTO DE PONTOS DE DESCONTINUIDADE DE f EM CADA SUBINTERVALO $[a,x]$ É FINITO (PORTANTO, DE MEDIDA NULA), SEGUE QUE $f|_{[a,x]}$ É INTEGRÁVEL P/ TODO $x \in [a,b]$.

(i) $F'(x) = f(x)$, $x \in [a,b] \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ (PROVADO EM AULA)

(ii) $F'(x+) = f(x+)$, $x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$.

DE FATO, DADO $\varepsilon > 0$ EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $|f(t) - f(x+)| < \varepsilon$ SE $x < t < x+\delta$. PORTANTO, SE $0 < h < \delta$ ENTÃO

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x+) \right| = \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x+)\,dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x+)|\,dt < \frac{1}{h} \cdot h \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

$\therefore F'(x+) = f(x+)$.

DA MESMA FORMA SE MOSTRA QUE $F'(x-) = f(x-)$, SE $x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$. //

CONTÍNUA

(c) **(3 pontos)** Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,t)$, uma função contínua que admite derivada em relação à x e defina

$$F(x) = \int_a^x f(x,t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que F é diferenciável e $F'(x) = f(x,x) + \int_a^x f_x(x,t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde f_x denota a derivada de f em relação à x.

Conclua que se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua então a função $F(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,dt$ satisfaz a equação diferencial $F'' + F = g$ sujeita às condições iniciais $F(0) = F'(0) = 0$.

SEJAM $h \neq 0$ E $x \in \mathbb{R}$ FIXADO. ENTÃO

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(x+h,t)\,dt - \int_a^x f(x,t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(x+h,t)\,dt - \int_a^x f(x+h,t)\,dt + \int_a^x f(x+h,t)\,dt - \int_a^x f(x,t)\,dt\right\}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x+h,t)\,dt}_{\doteq G_1(h)} + \underbrace{\int_a^x \left[\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}\right] dt}_{\doteq G_2(h)}$$

O RESULTADO FICA PROVADO SE MOSTRARMOS QUE

$$G_1(h) \xrightarrow{h\to 0} f(x,x) \quad \text{E} \quad G_2(h) \xrightarrow{h\to 0} \int_a^x f_x(x,t)\,dt\,.$$

$\boxed{G_1}$ COMO f É CONTÍNUA, DADO $\varepsilon > 0$ EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $|f(x+h,t) - f(x,x)| < \varepsilon$ DESDE QUE $|h| + |t-x| < \delta$.

ASSIM, PARA TAIS h'S,

$$|G_1(h) - f(x,x)| = \left|\frac{1}{h}\int^{x+h} f(x+h,t)\,dt - \frac{1}{h}\int^{x+h} f(x,x)\,dt\right|$$

Questão 2 Classifique as integrais abaixo em absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes (converge, mas não em módulo) ou divergentes (cada ítem vale **(1,5 ponto)**):

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2014} e^{-x^2}}{7x^4+3} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x^{2014} e^{-x^2}}{7x^4+3} dx$

DADOS $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, E $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, TEMOS QUE

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^m e^{-ax^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^m}{e^{ax^2}} = \dots = 0, \text{ POR L'HOSPITAL.}$$

COMO A RESTRIÇÃO DE $x \mapsto x^m e^{-ax^2}$ A CADA INTERVALO LIMITADO É LIMITADA (POR CONTINUIDADE), SEGUE QUE EXISTE $C(a,m) > 0$ (DEPENDENDO DE a E m) TAL QUE

$$|x^m e^{-ax^2}| \leq C(a,m), \underline{x \in \mathbb{R}}.$$

PORTANTO, COMO $7x^4+3 \geq 3$, $x \in \mathbb{R}$, ENTÃO

$$0 \leq \frac{x^{2014} e^{-x^2}}{7x^4+3} \leq \frac{1}{3} x^{2014} e^{-x^2} \leq \frac{1}{3} C(\tfrac{1}{2}, 2014) e^{-x^2/2}.$$

COMO $\int_0^\infty e^{-x^2} dx < \infty$, SEGUE, POR COMPARAÇÃO, QUE A INTEGRAL CONVERGE ABSOLUTAMENTE

(b) $\int_0^{\infty} x^2 \sin(x^{5/2}) dx$

COMO O INTEGRANDO É CONTÍNUO EM $x=0$, BASTA ESTUDARMOS A INTEGRAL $\int_1^\infty x^2 \operatorname{sen}(x^{5/2}) dx$:

$$u = x^{5/2}, \quad dx = \tfrac{2}{5} u^{-3/5} du$$

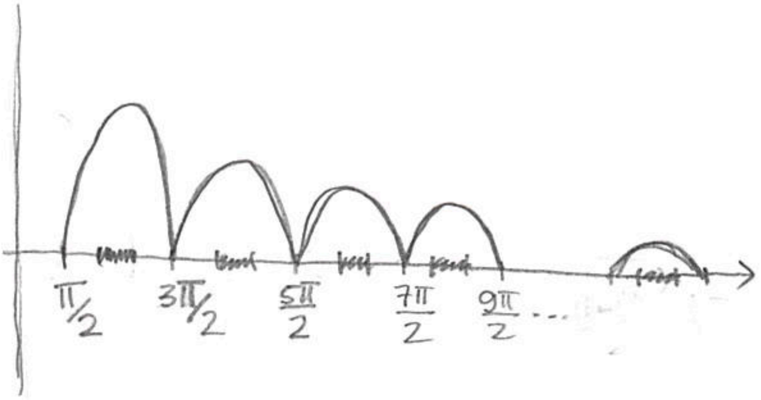
$$\int_1^\infty x^2 \operatorname{sen}(x^{5/2}) dx = \int_1^\infty (u^{2/5})^2 \operatorname{sen} u \cdot \frac{2}{5} u^{-3/5} du$$

$$= \frac{2}{5} \int_1^\infty u^{1/5} \operatorname{sen} u \, du$$

ESTA ÚLTIMA INTEGRAL DIVERGE, CONFORME VIMOS EM AULA (DECORRÊNCIA DO TVM PARA INTEGRAIS).

A CONVERGÊNCIA <u>NÃO</u> É ABSOLUTA:

PODEMOS OBTER SUBINTERVALOS I_k DE COMPRIMENTO FIXO IGUAL A $\alpha > 0$ TAIS QUE $|\cos x| \geq 1/2$, P/ TODO $x \in I_k$. $\left(I_k \subset \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right) \right)$. LOGO,



$$\int_{\pi/2}^{(2k+1)\pi/2} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}\, dx \geq \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} \frac{1/2}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} \frac{dx}{\sqrt{2j+1}}$$

$$= \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \xrightarrow{k \to \infty} \infty$$

PORTANTO, A INTEGRAL CONVERGE CONDICIONALMENTE.

(c) $\int_2^\infty \frac{(\log x)^5}{x^{4/3}} dx$ (A)

FAÇA $u = \log x \therefore x = e^u, \; dx = e^u du$, LOGO,

$$(A) = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{u^5}{e^{4/3 u}} \cdot e^u du = \int_{\log 2}^{\infty} u^5 e^{-u/3} du \quad (AA)$$

A ÚLTIMA INTEGRAL CONVERGE: CONFORME VIMOS EM (a), EXISTE $C > 0$ TAL QUE $u^5 e^{-u/3} \leq C e^{-u/6}$, $u \geq 0$.

COMO $\int_0^\infty e^{-u/6} du < \infty$, SEGUE QUE (AA) É FINITA $\therefore$

(A) CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

(d) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \underbrace{\int_{0^+}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx}_{\boxed{A}} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx}_{\boxed{B}}$

$\boxed{A}$ TEMOS QUE $0 \leq \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, PARA TODO $x \in [0, \pi/2]$;

COMO $\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$, SEGUE QUE $\boxed{A}$ CONVERGE (ABSOLUTAMENTE).

$\boxed{B}$ PODEMOS APLICAR O CRITÉRIO DE DIRICHLET:

* $\left| \int_a^b \cos x \, dx \right| = |\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq 2$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\therefore$ A INTEGRAL CONVERGE.

Questão 3 Mostre que cada uma das integrais abaixo, dependentes do parâmetro t, convergem uniformemente para todo $t \in J$ (cada ítem vale **1,5 ponto**):

(a) $F(t) = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + t^2} dx$, $J = \mathbb{R}$

$* \quad \frac{x}{x^2+t^2} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to \infty} 0$ (UNIFORMEMENTE EM t)

$* \quad \sup_{c>b>0} \left| \int_b^c \operatorname{sen} x \, dx \right| \leq 2$

$\therefore$ A INTEGRAL CONVERGE UNIFORMEMENTE EM $t \in \mathbb{R}$. (CRITÉRIO DE DIRICHLET)

(b) $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos(tx) dx$, $J = [a, \infty)$ ($a > 0$ é fixado).

$\underline{t \geq a > 0}$: $|e^{-tx^2} \cos(tx)| \leq e^{-ax^2} \equiv M(x)$

E $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx < \infty$ $\therefore$ A INT. CONVERGE UNIFORMEMENTE P/ TODO $t \in J$. (M-TESTE DE WEIERSTRASS)