UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM111 - Análise II
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

TERCEIRA PROVA - 25/07/2013

Nome: ____

Assinatura: ____

ATENÇÃO!

1. Você pode utilizar *todos* os resultados provados em aula e deve justificar todas as suas respostas;
2. Faça a prova a lápis;
3. As questões 1 e 2 valem juntas **6,0** pontos e devem ser entregues até o dia 29/07/2013. A questão 3 vale **4,0** pontos e deve ser entregue até o dia 01/08/2013.
4. Boa prova!

Questão 1 (a) Uma função de classe C^∞ é dita *analítica* em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ se coincidir, em um intervalo contendo x_0, com sua série de Taylor em torno de x_0. Mostre que não existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ analítica tal que

$$\{a \in \mathbb{R} : f \text{ é analítica em } a\} = \mathbb{Q}.$$

(b) Uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de números reais é dita de *crescimento polinomial* se existirem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|a_n| \leq C n^k,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $\{a_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de crescimento polinomial então a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tem raio de convergência ≥ 1. Vale a recíproca?

(c) Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

(d) Se $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^k por partes, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n = \lim_{n\to\infty} n^k b_n = 0$$

onde a_n, b_n denotam os coeficientes de Fourier de f.

(e) Prove que $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^x$ é analítica em $(0, \infty)$.

(f) Escrevendo a função do ítem anterior em termos da base e e expandindo o expoente em série de potências em torno de $x_0 = 1$, prove que é verificada a fórmula

$$x^x = \lim_{n\to\infty} e^{x-1} \cdot \frac{e^{\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}} \cdot e^{\frac{(x-1)^4}{3\cdot 4}} \cdot e^{\frac{(x-1)^6}{5\cdot 6}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{(x-1)^{2n}}{(2n-1)\cdot(2n)}}}{e^{\frac{(x-1)^3}{2\cdot 3}} \cdot e^{\frac{(x-1)^5}{4\cdot 5}} \cdot e^{\frac{(x-1)^7}{6\cdot 7}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n)\cdot(2n+1)}}},$$

para todo $x \in (1, 2]$. Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{12}} \cdot e^{\frac{1}{30}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{(2n-1)(2n)}}}{e^{\frac{1}{6}} \cdot e^{\frac{1}{20}} \cdot e^{\frac{1}{42}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{(2n)(2n+1)}}} = \frac{4}{e}.$$

(g) Seja $F \subset \mathbb{R}$ um subconjunto fechado. Mostre que existe $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de classe C^∞ tal que

$$F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}.$$

É possível obter uma tal f analítica real?

Questão 2 (a) Mostre que a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log x$ é analítica em $(0, \infty)$ e determine sua expressão em série de potências em torno de um ponto $a > 0$. Determine também o raio de convergência da expansão em série de potências em torno de a. Você pode usar a expansão de $\log x$ em torno do ponto $a = 1$ que calculamos em aula.

(b) Considere $f, g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \tan x$ e $g(x) = \sec x$. Mostre (usando o teorema de Bernstein, por exemplo) que f e g coincidem com suas séries de Taylor em torno da origem. Determine estas séries.

Questão 3 Os *polinômios de Bernoulli* $\mathsf{B}_k(x)$ são definidos de maneira indutiva: definimos $\mathsf{B}_1(x) = x - \frac{1}{2}$ e colocamos, para $k > 1$,

$$\mathsf{B}_k(x) = k\int_0^x \mathsf{B}_{k-1}(t)\,dt + \mathsf{B}_k,$$

onde $\mathsf{B}_1 = -\frac{1}{2}$ e os números B_k são escolhidos de forma que $\int_0^1 \mathsf{B}_k(x)\,dx = 0$, para todo $k \geq 1$. Os números $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \ldots$ são chamados *números de Bernoulli*. Evidentemente, $\mathsf{B}_k(0) = \mathsf{B}_k$, para todo $k \geq 1$.

(a) Mostre, por indução, que $\mathsf{B}_k = 0$ é um polinômio de grau k para todo $k \geq 1$. Determine $\mathsf{B}_k(x)$ para todo $k \leq 8$.

(b) Mostre que $\mathsf{B}_k(1) = (-1)^k \mathsf{B}_k(0)$ e $\mathsf{B}_k(1-x) = (-1)^k \mathsf{B}_k(x)$

(b) Mostre, por indução, que $\mathsf{B}_{2k+1} = 0$ para todo $k > 1$.

(c) Usando o fato que $\mathsf{B}'_k(x) = k\mathsf{B}_{k-1}(x)$ e indução, mostre que

$$\mathsf{B}_k^{(r)}(x) = r!\binom{k}{r}\mathsf{B}_{k-r}(x)$$

e conclua que $\mathsf{B}_k^{(r)}(0) = r!\binom{k}{r}\mathsf{B}_{k-r}$, para $0 \leq r \leq k$.

(d) Usando o ítem anterior, mostre que

$$\mathsf{B}_k(x) = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\mathsf{B}_{k-r}x^r,$$

para qualquer $k > 1$.

Vamos determinar a série de Fourier de algumas restrições dos polinômios de Bernoulli ao intervalo $[0,1)$. Antes de mais nada, uma observação sobre séries de Fourier. Trabalhamos com séries de Fourier de funções definidas em $[-\pi,\pi)$, mas o papel do intervalo $[-\pi,\pi)$ é irrelevante; caso desejemos trabalhar com funções definidas em $[-L, L)$, a série de Fourier de f será

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ e $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$, $n \geq 0$.

(e) Determine a série de Fourier de $f(x) = x$ no intervalo $[-1/2, 1/2)$, substitua x por $x - 1/2$ e use o teorema de convergência das séries de Fourier para obter a identidade

$$\mathsf{B}_1(x) = x - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\left(2\pi n\left(x - \frac{1}{2}\right)\right),$$

para $0 < x < 1$.

(f) Usando o fato que $\mathsf{B}_2'(x) = 2\mathsf{B}_1(x)$, conclua que

$$\mathsf{B}_2(x) = -4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi n)^2}\cos\left(2\pi n\left(x-\frac{1}{2}\right)\right),$$

para $0 < x < 1$.

(g) Mostre que se $\{x\} \doteq x - [x]$, então

$$\mathsf{B}_{2m}(\{x\}) = 2(-1)^m(2m)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi n)^{2m}}\cos\left(2\pi n\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

e

$$\mathsf{B}_{2m+1}(\{x\}) = 2(-1)^{m+1}(2m+1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi n)^{2m+1}}\operatorname{sen}\left(2\pi n\left(x-\frac{1}{2}\right)\right).$$

(h) Conclua que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2n)!}.$$

Em particular, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$.

Questão 4 O objetivo desta questão é provar que a série de Fourier de uma função $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ seccionalmente diferenciável com derivada em $\mathscr{L}^1$ converge uniformemente para f em qualquer subintervalo de $[-\pi, \pi)$ que não contenha pontos de descontinuidade de f.

(a) Mostre que a série de Fourier de um função contínua g com derivada em $\mathscr{L}^1$ converge uniformemente para g em $[-\pi, \pi]$.

(b) Considere ψ a extensão ímpar da função $y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$, $0 \le x < \pi$ ao intervalo $[-\pi, \pi]$. Mostre que a série de Fourier de ψ é

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

(c) Mostre que a série acima converge uniformemente para ψ em $[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$, para qualquer $\delta \in (0, \pi)$.

(d) Seja f como no enunciado e suponhamos que $x_0 \in (-\pi, \pi)$ seja o único ponto de descontinuidade de f. Verifique que

$$g(x) = f(x) - \omega_0 \psi(x - x_0), \; \omega_0 \doteq f(x_0+) - f(x_0-),$$

satisfaz às hipóteses do ítem (a) (i.e., é contínua com derivada em $\mathscr{L}^1$). Conclua, a partir do ítem (a), que a série de Fourier de f converge uniformemente para f em qualquer subintervalo de $[-\pi, \pi)$ que não contenha o ponto x_0.

(e) Prove o resultado anterior para uma quantidade finita qualquer de descontinuidades da função f.