UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM202 - Cálculo diferencial e integral II
Prof. José Carlos Eidam

Lista 1

✰ Integrais múltiplas

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

   (a) $\int\int_R (2y^2 - 3xy^3)\,dxdy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$.
   (b) $\int\int_R x\text{sen}\, y\,dxdy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \le x \le 4, 0 \le y \le \frac{\pi}{6}\}$.
   (c) $\int\int_R \frac{1}{x+y}\,dxdy$, onde $R = [1,2] \times [0,1]$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. .

3. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.

4. Calcule as integrais iteradas $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dydx$ e $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy$. As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

5. Calcule as seguintes integrais duplas:
   (a) $\int\int_D xy\,dxdy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.
   (b) $\int\int_D (x^2 - 2xy)\,dxdy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 2 - x\}$.
   (c) $\int\int_D e^{x/y}\,dxdy$, onde $D = \{(x, y) : 1 \le y \le 2, y \le x \le y^3\}$.
   (d) $\int\int_D x\cos y\,dxdy$, onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.
   (e) $\int\int_D 4y^3\,dxdy$, onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$.
   (f) $\int\int_D xy\,dxdy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1.
   (g) $\int\int_D (x^2\text{tg}\, x + y^3 + 4)\,dxdy$, onde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 2\}$.

6. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

   (a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

   (b) S é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1,1)$, $(4,1)$ e $(1,2)$.

   (c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + 2y = 2$.

   (d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

(e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$.

(f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$.

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $x - 2y + 1 = 0$.

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$ (b) $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dx\,dy$

(c) $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy$.

9. Calcule as integrais:

(a) $\int\int_R x\,dx\,dy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

(b) $\int\int_R xy\,dx\,dy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$.

(c) $\int\int_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

(d) $\int\int_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \le \theta \le 2\pi$.

10. Determine o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, com $a > 0$.

11. Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem densidade ρ, nos seguintes casos:

(a) $D = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ e $\rho(x,y) = x^2$.

(b) D é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(0,3)$ e $\rho(x,y) = x + y$.

(c) D é a região do primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 1$ e $\rho(x,y) = xy$.

(d) D é a região limitada pela parábola $y^2 = x$ e a reta $y = x - 2$ e $\rho(x,y) = 3$.

(e) $D = \{(x,y) : 0 \le y \le \operatorname{sen} x, 0 \le x \le \pi\}$ e $\rho(x,y) = y$.

12. Calcule as integrais triplas:

(a) $\int\int\int_D yz\,dx\,dy\,dz$, onde $D = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1, 0 \le y \le 2z, 0 \le x \le z+2\}$.

(b) $\int\int\int_D y\,dx\,dy\,dz$, onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

(c) $\int\int\int_D xy\,dx\,dy\,dz$, onde D é o tetraedro sólido com vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,3)$.

(d) $\int\int\int_D z\,dx\,dy\,dz$, onde D é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.

(e) $\int\int\int_D x\,dx\,dy\,dz$, onde D é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

13. Determine a massa e o centro de massa do cubo $Q = [0,a] \times [0,a] \times [0,a]$ cuja densidade é dada pela função $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

14. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int\int\int_E (x^2+y^2)\, dxdydz$, onde E é a região limitada pelo cilindro $x^2+y^2=4$ e pelos planos $z=-1$ e $z=2$.

(b) $\int\int\int_E y\, dxdydz$, onde E é a região entre os cilindros $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z=x+2$.

(c) $\int\int\int_E x^2\, dxdydz$, onde E é o sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=1$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z^2=4x^2+4y^2$.

15. Determine o volume da região R limitada pelos parabolóides $z=x^2+y^2$ e $z=36-3x^2-3y^2$.

16. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z=4x^2+4y^2$ e pelo plano $z=a$ $(a>0)$, se S tem densidade constante K.

17. Calcule as integrais:

(a) $\int\int\int_B (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$, onde B é a bola unitária $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

(b) $\int\int\int_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, onde E é a região interior ao cone $\varphi=\pi/6$ e à esfera $\rho=2$.

(c) $\int\int\int_E x\, dxdydz$, onde E é o conjunto $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\leq 1$, $x\geq 0$.

18. Determine a massa de um hemisfério sólido H de raio a se a densidade em qualquer ponto é proporcional a sua distância ao centro da base.

19. a) Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

b) Calcule a massa do sólido $\xi=\{x^2+y^2+z^2\leq r^2,\ z\geq a>0\}$, $\delta(x,y,z)=z$.

20. Seja f contínua em $[0,1]$ e seja R a região triangular com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Mostre que

$$\int\int_R f(x+y)\, dxdy = \int_0^1 u f(u)\, du.$$

21. Calcule $\int\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{n/2}}\, dxdy$, onde D é a região entre os círculos com centros na origem e raios r e R, $0<r<R$. Para que valores de n a integral tem limite quando $r\to 0+$? E quando $R\to\infty$?

22. Faça uma análise semelhante para a integral tripla

$$\int\int\int_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}}\, dxdy,$$

onde D é a região interior às esferas com centros na origem e raios r e R, $0<r<R$.

23. Use a transformação $x=u^2$, $y=v^2$, $z=w^2$ para calcular o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ e pelos planos coordenados.

✰ Integrais de linha

24. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(a) $\int_\gamma x\, ds$, $\gamma(t)=(t^3,t)$, $0\leq t\leq 1$.

(b) $\int_\gamma xy^4\,ds$, γ é a semi-circunferência $x^2+y^2=16$, $x\geq 0$.

(c) $\int_\gamma (x-2y^2)\,dy$, γ é o arco da parábola $y=x^2$ de $(-2,4)$ a $(1,1)$.

(d) $\int_\gamma xy\,dx+(x-y)\,dy$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(2,0)$ e de $(2,0)$ a $(3,2)$.

(e) $\int_\gamma xyz\,ds$, $\gamma: x=2t$, $y=3\,\mathrm{sen}\,t$, $z=3\cos t$, $0\leq t\leq \pi/2$.

(f) $\int_\gamma xy^2z\,ds$, γ é o segmento de reta de $(1,0,1)$ a $(0,3,6)$.

(g) $\int_\gamma x^3y^2z\,dz$, γ é dada por $x=2t$, $y=t^2$, $z=t^2$, $0\leq t\leq 1$.

(h) $\int_\gamma z^2\,dx-z\,dy+2y\,dz$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(0,1,1)$, de $(0,1,1)$ a $(1,2,3)$ e de $(1,2,3)$ a $(1,2,4)$.

25. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z)=(x^2+y)\vec{i}-7yz\vec{j}+2xz^2\vec{k}$ e γ é a curva ligando o ponto $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$ nos seguintes casos:

(a) $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$;

(b) γ é composta dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$, depois a $(1,1,0)$ e depois a $(1,1,1)$;

26. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para:

(a) (a) $\vec{F}(x,y)=y\vec{i}+(x^2+y^2)\vec{j}$, onde γ é o arco de circunferência $\gamma(x)=(x,\sqrt{4-x^2})$, ligando $(-2,0)$ a $(2,0)$;

(b) (b) $\vec{F}(x,y)=2(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário.

27. Calcule:

(a) $\int_\gamma x\,dx+(y+x)\,dy+z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z=x^2+y^2$ e $z=2x+2y-1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário;

(b) $\int_\gamma (2y+1)\,dx+z\,dy+x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x^2+4y^2=1$ e $x^2+z^2=1$, com $y\geq 0$, $z\geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(-1,0,0)$;

(c) $\int_\gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x+y=2$ e $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxz seja percorrida uma vez no sentido horário;

(d) $\int_\gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z=xy$ e $x^2+y^2=1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário;

(e) $\int_\gamma x^2\,dx+x\,dy+z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z=\frac{x^2}{9}$ e $z=1-\frac{y^2}{4}$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário;

(f) $\int_\gamma y^2\,dx+3z\,dy$, sendo γ a intersecção das superfícies $z=x^2+y^2$ e $z=2x+4y$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário;

(g) $\int_\gamma z\,dy-x\,dz$, sendo γ a intersecção do elipsóide $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}=\frac{4}{3}$ com o plano $x+z=2$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário.

28. Calcule:

(a) $\int_\gamma 2x\,dx+(z^2-y^2)\,dz$, onde γ é o arco circular dado por $x=0$, $y^2+z^2=4$, de $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$ $y\geq 0$;

(b) $\int_\gamma \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2+y^2=a^2$, percorrida uma vez no sentido horário;

(c) $\int_\gamma \sqrt{y}\,dx+\sqrt{x}\,dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x=0$, $y=1$ e $y=x^2$, percorrida uma vez no sentido horário;

29. Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo $x^2+y^2=4$, $x\geq 0$. Se a densidade linear é x^2, determine a massa e o centro de massa do cabo.

30. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y)=x\vec{i}+(y+2)\vec{j}$ ao mover um ponto ao longo da ciclóide $\vec{r}(t)=(t-\text{ sen}t)\vec{i}+(1-\cos t)\vec{j}$, $0\leq t\leq 2\pi$.

31. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\oint_\gamma x^2y\,dx+xy^3\,dy$, onde γ é o quadrado com vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, orientado positivamente;

(b) $\oint_\gamma (x+2y)\,dx+(x-2y)\,dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y=x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ e do segmento de reta de $(1,1)$ a $(0,0)$.

(c) $\oint_\gamma (y+e^{\sqrt{x}})\,dx+(2x+\cos y^2)\,dy$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y=x^2$ e $x=y^2$ percorrida no sentido anti-horário.

(d) $\oint_\gamma x^2\,dx+y^2\,dy$, γ é a curva $x^6+y^6=1$, sentido anti-horário.

(e) $\oint_\gamma xy\,dx+(2x^2+x)\,dy$, γ consiste do segmento de reta unindo $(-2,0)$ a $(2,0)$ e da semi-circunferência $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$, orientada positivamente.

(f) $\oint_\gamma 2xy\,dx+(x^2+x)\,dy$, γ é a cardióide $\rho=1+\cos\theta$ orientada positivamente.

(g) $\oint_\gamma (xy+e^{x^2})\,dx+(x^2-\ln(1+y))\,dy$, γ consiste do segmento de reta de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ e do arco da curva $y=\text{ sen}x$, orientada positivamente.

(h) $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y)=(y^2-x^2y)\vec{i}+xy^2\vec{j}$ e γ consiste do arco de circunferência $x^2+y^2=4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(2,0)$.

32. Seja D uma região de $\mathbb{R}^2$ com D e ∂D satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de D coincide com a integral $\int_{\partial D} x\,dy=\int_{\partial D} -y\,dx$.

33. Usando o exercício anterior, calcule a área de:

(a) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$;

(b) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^{2/3}+y^{2/3}\leq a^{2/3}\}$.

34. Determine a área da região limitada pela hipociclóide dada por $\vec{r}(t)=\cos^3 t\vec{i}+\text{ sen}^3 t\vec{j}$, $0\leq t\leq 2\pi$.

35. Neste exercício, vamos calcular a área de um polígono irregular.

(a) Se γ é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), mostre que

$$\int_\gamma x\,dy - y\,dx = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

(b) Em ordem anti-horária, os vértices de um polígono são (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N). Mostre que sua área é dada por

$$A = \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \ldots + (x_{N-1} y_N - x_N y_{N-1}) + (x_N y_1 - x_1 y_N)].$$

(c) Determine a área do pentágono de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(0,2)$ e $(-1,2)$.

36. Calcule

(a) $\int_\gamma x^2(5y\,dx + 7x\,dy) + e^y\,dy$, sendo γ a elipse $16x^2 + 25y^2 = 100$, percorrida de $(0,-2)$ até $(0,2)$, $x > 0$.

(b) $\int_\gamma (2xe^y - x^2y - \frac{y^3}{3})\,dx + (x^2e^y + \operatorname{sen} y)\,dy$, sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$, percorrida de $(0,0)$ até $(2,0)$ com $y > 0$.

(c) $\int_\gamma \vec{v}\,dr$, sendo γ a fronteira do retângulo $[1,2] \times [-1,1]$ e $\vec{v}(x,y) = 2\arctan\frac{y}{x}\vec{i} + [\ln(x^2+y^2) + 2x]\vec{j}$, percorrida no sentido anti-horário.

37. Calcule

(a) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva fronteira da região determinada pelas curvas $y^2 = 2(x+2)$ e $x = 2$, orientada no sentido horário.

(b) $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva $y = x^2 + 1$ $-1 \le x \le 2$, percorrida do ponto (-1,2) a (2,5).

(c) $\int_\gamma \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$ sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido horário.

(d) $\int_\gamma \frac{x^2y\,dx - x^3\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ sendo $\gamma = \partial R$ onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 1\}$, orientada no sentido horário.

38. Verifique que a integral $\int_\gamma 2x \operatorname{sen} y\,dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\,dy$, onde γ é uma curva ligando $(-1,0)$ a $(5,1)$, é independente do caminho e calcule o seu valor.

39. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes percorrida uma vez no sentido horário. Encontre todos os valores possíveis para

(a) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$

(b) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{4x^2+9y^2}$

40. Sejam as curvas γ_1 a circunferência $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ percorrida no sentido anti-horário, γ_2 a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido anti-horário e γ_3 a curva formada pela união das três seguintes circunferências: $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$, $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$, ambas percorridas no sentido horário e $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ percorrida no sentido anti-horário. Se $I_k = \int_{\gamma_k} P\,dx + Q\,dy$ onde $P(x,y) = -y\left[\frac{1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{(x+1)^2+y^2}\right]$ e $Q(x,y) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$ então calcule I_1, I_2 e I_3.

41. Calcule $\int_\gamma F\,d\vec{r}$ onde $F=\left(\frac{-y}{x^2+\frac{y^2}{9}}+y, \frac{x}{x^2+\frac{y^2}{9}}+3x\right)$ se

   (a) γ é a curva $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, percorrida uma vez no sentido horário.
   (b) γ é a curva $(x-1)^2+y^2=4$, percorrida uma vez no sentido horário.

42. Um campo de vetores $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$ se diz *radial* (ou *central*) se existe uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x,y)=g(|\vec{r}|)\vec{r}$, onde $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Suponha que g é de classe C^1. Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

43. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$$

   sobre um caminho que não passe pela origem.

44. Em cada caso abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine o potencial de $\vec{F}$.

   (a) $\vec{F}(x,y)=x\vec{i}+x\vec{j}$ em $\mathbb{R}^2$
   (b) $\vec{F}(x,y)=(2xe^y+y)\vec{i}+(x^2e^y+x-2y)\vec{j}$ em $\mathbb{R}^2$
   (c) $\vec{F}(x,y,z)=(2x^2+8xy^2)\vec{i}+(3x^3y-3xy)\vec{j}+-(4z^2y^2+2x^3z)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$
   (d) $\vec{F}(x,y,z)=(x+z)\vec{i}-(y+z)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$
   (e) $\vec{F}(x,y,z)=(y^2\cos x+z^3)\vec{i}-(4+2y\,\mathrm{sen}x)\vec{j}+(3xz^2+2)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$
   (f) $\vec{F}(x,y)=\frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$, em $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$
   (g) $\vec{F}(x,y)=\frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$, em $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \text{ se } y=0\}$
   (h) $\vec{F}(x,y)=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$, em $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

45. Seja o campo $\vec{F}(x,y)=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$ e γ a curva dada por $\gamma(t)=(e^t,\ \mathrm{sen}t)$ para $0\le t\le\pi$. Calcule $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$.

46. Calcule as integrais:

   (a) (a) $\int_\gamma 7x^6y\,dx+x^7\,dy$ sendo $\gamma(t)=(t,e^{t^2-1})$, onde $t\in[0,1]$.
   (b) (b) $\int_\gamma [\ln(x+y^2)-y]\,dx+[2y\ln(x+y^2)-x]\,dy$ sendo γ a curva $(x-2)^2+y^2=1$ com $y\ge 0$ orientada no sentido horário.
   (c) (c) $\int_\gamma \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva dada por $x(t)=\cos^3 t$ e $y(t)=\ \mathrm{sen}^3 t$ com $y\ge 0$ ligando os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$, nessa ordem.

47. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

   (a) (a) $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy$.
   (b) (b) $\int_{(0,0)}^{(a,b)}\ \mathrm{sen}y\,dx+x\cos y\,dy$.

48. Calcule

(a) (a) $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$.

(b) (b) $\int_\gamma \sin(yz)\,dx + xz\cos(yz)\,dy + xy\cos(yz)\,dz$, sendo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

49. Calcule $\int_A^B \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$, onde o ponto A pertence à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o ponto B pertence a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

50. Se $\vec{n}(x, y)$ é vetor unitário normal ao traço da curva γ em (x, y), calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\,ds$ sendo

(a) (a) $\vec{F}(x, y) = x^{10}\vec{i} + (3x - 10x^9 y)\vec{j}$ e γ a parte da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ contida no primeiro quadrante, n normal exterior à circunferência

(b) (b) $\vec{F}(x, y) = x^3 y^3 \vec{i} - \frac{3x^2y^4+2}{4}\vec{j}$ e $\gamma(t) = (t^3,\ \text{sen}(4\arctan t^2))$, $t \in [0, 1]$, $n \cdot \vec{j} \le 0$.

✰ Respostas

(1) (a) $-\frac{585}{8}$, (b) $\frac{15}{4}(2-\sqrt{3})$, (c) $\ln\frac{27}{16}$; **(2)** $\frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1)$; **(3)** 36; **(4)** $-1/2$ e $1/2$; **(5)** (a) $\frac{1}{12}$, (b) $-\frac{19}{42}$, (c) $\frac{1}{2}e^4 - 2e$, (d) $(1-\cos 1)/2$, (e) $\frac{500}{3}$, (f) $\frac{1}{8}$, (g) 8π; **(6)** (a) $\frac{6}{35}$, (b) $\frac{31}{8}$, (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5}-27) + \frac{9}{2}arcsen\frac{2}{3}$, (d) $\frac{1}{6}$, (e) $\frac{1}{3}$, (f) $\frac{16}{3}r^3$; **(8)** (a) $(e^9-1)/6$, (b) $\frac{1}{4}\sin 81$, (c) $(2\sqrt{2}-1)/3$; **(9)** (a) 0, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$; **(11)** (a) $\frac{2}{3}$, $(0, \frac{1}{2})$, (b) 6, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$, (c) $\frac{1}{6}$, $(\frac{4}{7}, \frac{3}{4})$, (d) $\frac{27}{2}$, $(\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$ (e) $\frac{\pi}{4}$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi})$; **(12)** (a) $\frac{7}{5}$, (b) $\frac{5}{28}$, (c) $\frac{1}{10}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{16\pi}{3}$; **(13)** a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$; **(14)** (a) 24π, (b) 0, (c) $2\pi/5$; **(15)** 162π; **(16)** $\pi K a^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$; **(17)** (a) $4\pi/5$, (b) $4\pi(2-\sqrt{3})$, (c) $\frac{3\pi}{2}$; **(18)** $K\pi a^4/2$, onde K é a constante de proporcionalidade; **(19)** (a) $\frac{4}{3}\pi abc$; (b) $\frac{\pi}{4}(r^2-a^2)^2$;

(24) (a) $(10\sqrt{10}-1)/54$, (b) 1638,4, (c) 48, (d) $\frac{17}{3}$, (e) $9\sqrt{13}\pi/4$, (f) $3\sqrt{35}$, (g) $\frac{16}{11}$, (h) $\frac{77}{6}$; **(25)** (a) $-\frac{11}{15}$, (b) 1; **(26)** (a) 2π, (b) πab; **(27) (a)** $-\pi$**, (b)** -2**, (c)** $-2\pi\sqrt{2}$**, (d)** π**, (e)** 6π**, (f)**10π**, (g)** $R = -2\pi\sqrt{3}$**;** **(28) (a)** $-\frac{8}{3}$**; b)** 2π**; c)** $-3/10$**; (29)** $4\pi, (\frac{16}{3\pi}, 0)$**; (30)** $2\pi^2$**; (31) (a)** $-1/12$**, (b)** $-1/6$**, (c)** $1/3$**, (d)** 0**, (e)** 2π**, (f)** $\frac{3\pi}{2}$ **, (g)** π**, (h)** $\pi + \frac{16}{3}[\frac{1}{\sqrt{2}} - 1]$**; (34)** $3\pi/8$**; (35)** (c) $\frac{9}{2}$; **(36)** (a) $e^{-2} - e^2 + \frac{125}{2}\pi$; (b) $4 - \frac{3\pi}{4}$; (c) 4; **(37)** (a) -2π; (b) $\frac{1}{2}\ln\frac{29}{5}$; (c) 2π; (d) π; **(38)** $25\sin 1 - 1$; **(39)** (a) 0 ou -2π; b) 0 ou $-\frac{\pi}{3}$; **(40)** $I_1 = 2\pi$; $I_2 = 6\pi$; $I_3 = -2\pi$; **(41)** (a) -8π; (b) -14π; **(43)** $2k\pi$, com k inteiro; **(44)** (a) não; (b) $\varphi = x^2e^y + xy - y^2 + c$; (c) não; (d) $\varphi = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + zx - zy + c$; (e) $\varphi = y^2\sin x + xz^3 - 4y + 2z + c$; (f) não; (g) $\varphi = \arctan(y/x)$; (h) $\varphi = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + c$; **(45)** π; **(46)** (a) 1, (b) $3\ln 3 - 2$, (c) $\frac{-\pi}{2}$; **(47)** (a) $a^2b - \frac{b^3}{3} - \frac{2}{3}$; (b) $a\sin b$; **(48)** (a) -2, (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$; **(49)** $\ln 2$; **(50)** (a) $-\frac{1}{11}$; (b) $\frac{1}{2}$.