UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM202 - Física diurno
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

SEGUNDA PROVA - 03/07/2013

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ______________________________

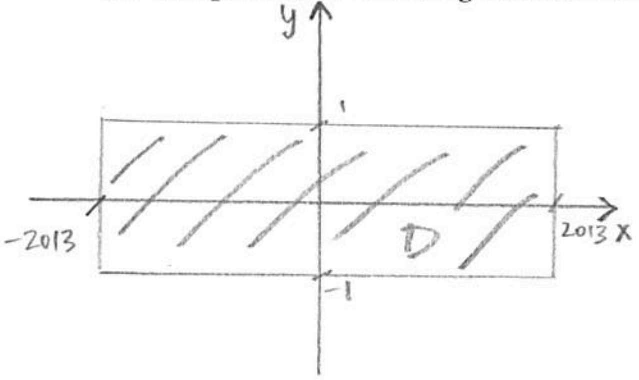
ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 10h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

zeca77@gmail.com

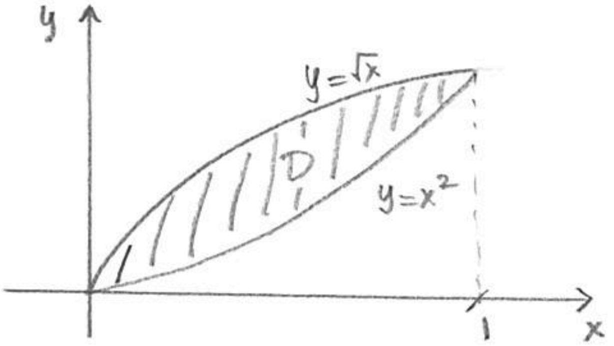
Questão 1 Calcule $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ para cada um dos ítens abaixo:

(a) **(1,5 ponto)** D é o retângulo de vértices $(2013,1), (-2013,1), (-2013,-1), (2013,-1)$ e $f(x,y) = y$.



$$\iint_D y\,dxdy = 0 \quad \text{POR SIMETRIA.}$$

(b) **(2 pontos)** D é a região plana do primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ e $f(x,y) = x + y$.



$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx$$

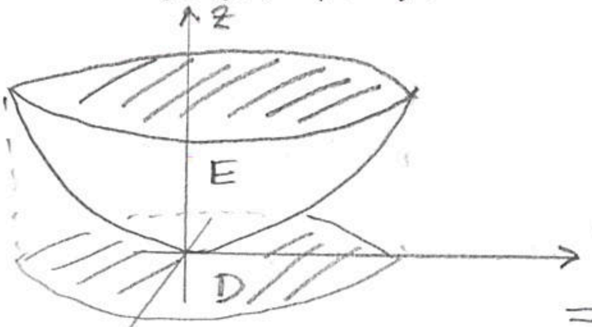
$$= \int_0^1 \left\{ x\sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right\} dx$$

$$= \frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = 3/10.$$

Questão 2 Calcule $\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ para cada um dos ítens abaixo:

(a) **(1,5 ponto)** E é a região sólida delimitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$ e $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.



$\boxed{D : x^2+y^2 \leq 4}$

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_D \left\{ \int_{x^2+y^2}^{4} \sqrt{x^2+y^2}\,dz \right\} dxdy$$

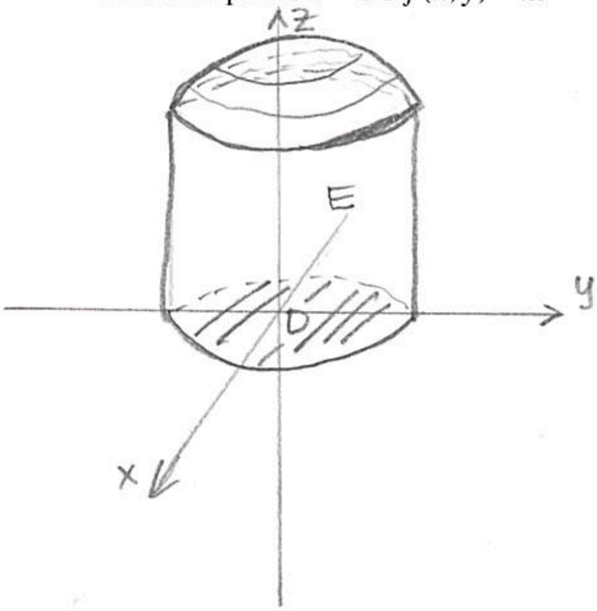
$$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,(4-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r(4-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4r^2 - r^4)\,dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2} = \frac{128\pi}{15}.$$

(b) **(2 pontos)** E é a região sólida interior ao cilindro $x^2+y^2 = 1$, interior à esfera $x^2+y^2+z^2 = 5$ e acima do plano $z = 0$ e $f(x,y) = z$.



$$\iiint_E z\,dxdydz = \iint_D \left\{ \int_0^{\sqrt{5-x^2-y^2}} z\,dz \right\} dxdy$$

$$= \iint_D \sqrt{5-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \sqrt{5-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

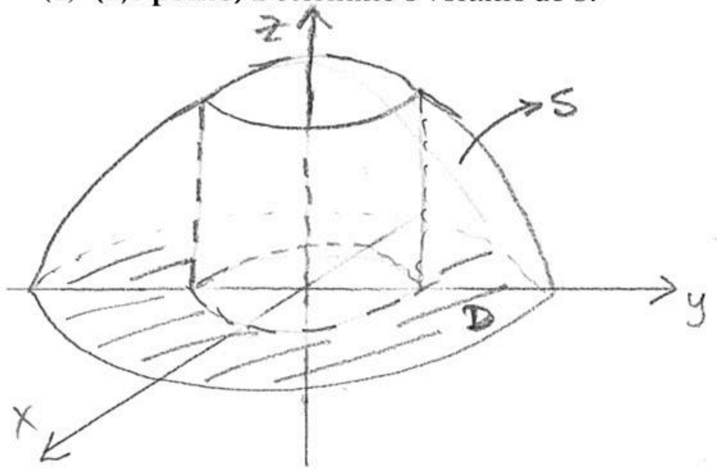
$$= 2\pi \left.\frac{(5-r^2)^{3/2}}{3/2\cdot(-2)}\right|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-8).$$

Questão 3 Seja S o sólido que ocupa a região acima do plano $z = 0$ interior ao parabolóide

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(a) **(1,5 ponto)** Determine o volume de S.



$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3^2$

$$V = \iiint_S dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_D (9 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^3 (9 - r^2)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \left.\frac{(9-r^2)^2}{-2}\right|_1^3 = 64\pi$$

UNIDADES DE VOLUME.

(b) **(1,5 ponto)** Se a densidade de S no ponto (x, y, z) é $\rho(x, y, z) = z^2$, determine a massa de S.

$$m = \iiint_S \rho\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_D \left\{\int_0^{9-x^2-y^2} z^2\,dz\right\} dx\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\iint_D (9 - x^2 - y^2)^3\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_1^3 (9 - r^2)^3\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot \left.\frac{(9-r^2)^4}{4\cdot(-2)}\right|_{r=1}^{r=3} = \frac{128\pi}{3}$$

UNIDADES DE MASSA.