**UFPR - Universidade Federal do Paraná**
**Departamento de Matemática**
**CM202 - Física diurno**
**Prof. José Carlos Eidam**

| 1 | |
|---|---|
| 2 | |
| 3 | |
| Nota | |

GABARITO

**TERCEIRA PROVA - 29/07/2013**

**Nome:** ____________________

**GRR:** ____________ **Assinatura:** ____________

**ATENÇÃO!**

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 10h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

**Questão 1** **(2 pontos)** Calcule $\int\int\int_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, onde $E$ é a região interior à esfera de centro na origem e raio 1.

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r \cdot r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \pi$$

**Questão** 2 Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para cada um dos ítens abaixo:

(a) **(2 pontos)** $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ e $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{-\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} \cdot (-\operatorname{sen} t) + \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} \cdot \cos t \right\} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

(b) **(2 pontos)** $\vec{F}(x,y) = (\underbrace{e^x + y}_{P}, \underbrace{\cos y + x}_{Q})$ e $\gamma(t) = (t, t + \operatorname{sen}^2(t^2 - t))$, $0 \le t \le 1$

$Q_x = 1 = P_y$ ; COMO O DOMÍNIO É SIMPLESMENTE CONEXO, $\vec{F}$ ADMITE UM POTENCIAL $f$.

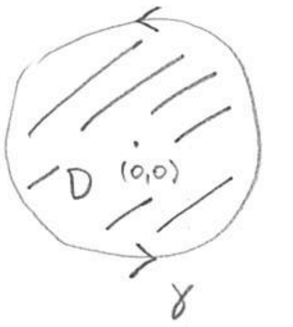
CALCULANDO $f$ $\begin{cases} f_x = e^x + y \\ f_y = \cos y + x \end{cases} \Longrightarrow f(x,y) = e^x + \operatorname{sen} y + xy$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

$$= f(1,1) - f(0,0)$$

$$= (e^1 + \operatorname{sen} 1 + 1) - (1) = e + \operatorname{sen} 1.$$

(c) **(2 pontos)** $\vec{F}(x,y) = \big(\overbrace{\cos(x^2)e^{\operatorname{tg} x} - xy}^{P}, \overbrace{xy^2 + \ln(1+y^2)}^{Q}\big)$ e $\gamma$ é a fronteira do círculo de centro na origem e raio 1 orientada no sentido anti-horário.




$$Q_x = y^2 \quad , \quad P_y = -x$$

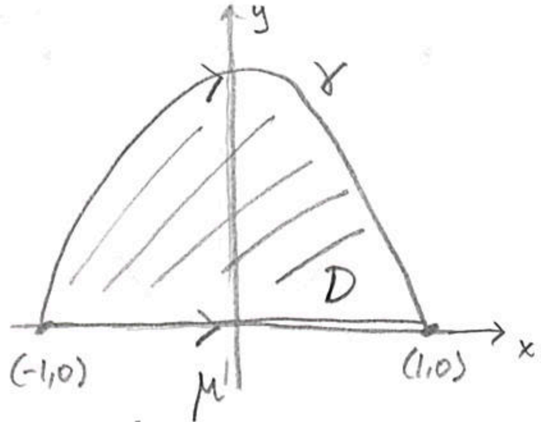
$$\therefore \oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_D \left(Q_x - P_y\right) dx dy = \iint_D (y^2 + x)\, dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r \operatorname{sen} \theta)^2\, r\, dr d\theta$$

$$= \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}.$$

(d) **(2 pontos)** $\vec{F}(x,y) = \big(\overbrace{1 - yx^2}^{P}, \overbrace{\arctan(y^2) - y^3\cos(2y-1) + xy}^{Q}\big)$ e $\gamma$ é a parábola $y = 1 - x^2$ percorrida desde o ponto $(-1,0)$ até o ponto $(1,0)$.




$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} - \underbrace{\int_\mu \vec{F}\, d\vec{r}}_{★} = \underbrace{\iint_D \left(Q_x - P_y\right) dx dy}_{★★}$$

$$★ = \int_{-1}^{1} (1,0)\cdot(1,0)\, dt = 2$$

$$★★ = \iint_D (y - x^2) = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} (y - x^2)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{(1-x^2)^2}{2} - x^2(1-x^2) \right\} dx$$

$$= 2\int_0^1 \left\{ \frac{3}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2} \right\} dx = 2\left\{ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{14}{15} \quad \therefore$$

(e) **(2 pontos)** $\vec{F}(x,y) = \Big(\overbrace{y^2\cos(xy^2) + xe^{x^2}}^{P}, \overbrace{2xy\cos(xy^2) - y}^{Q}\Big)$ e $\gamma$ é a curva fechada plana definida pela equação $x^{1/5} + y^{1/5} = 1$ orientada no sentido anti-horário.

O DOMÍNIO DE $\vec{F}$ É SIMPLESMENTE CONEXO E

$Q_x = P_y$ $\therefore$ $\vec{F}$ É CONSERVATIVO.

POTENCIAL P/ $\vec{F}$

$$\begin{cases} f_x = y^2\cos(xy^2) + xe^{x^2} \\ f_y = 2xy\cos(xy^2) - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \operatorname{sen}(xy^2) + \frac{e^{x^2}}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

COMO A CURVA $\gamma$ É FECHADA, ENTÃO

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$