UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas Departamento de Matemática
MA22 - Fundamentos de Cálculo - PROFMAT
Prof. José Carlos Eidam
1o. semestre de 2013

Lista 1

✰ Sequências de números reais

1. Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

(1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$ (2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \ldots$ (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \ldots$

(4) $a_n = \left(4+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ (5) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n-1}$, $n \geq 2$ (6) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

(7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (8) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ (9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$

(10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1}-n)$ (11) $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$ (12) $a_n = \operatorname{sen} n$

(13) $a_n = \frac{2n+\operatorname{sen} n}{5n+1}$ (14) $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$ (15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

(16) $a_n = \frac{n\operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}$ (17) $a_n = \frac{3^n}{2^n+10^n}$ (18) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$

(19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (20) $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$ (21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(22) $a_n = n - n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ (23) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $0 < a < b$ (24) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

(25) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$ (26) $a_n = \frac{\sqrt{n}+\operatorname{sen}(2n!-7)}{n+3\sqrt{n}}$ (27) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$

(28) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (30) $a_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

(31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (32) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$ (33) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

(34) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (35) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ (36) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

(37) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$ (38) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ (39) $a_n = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$

(40) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$ (41) $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ (42) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!^2}}$

(43) $a_n = \frac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$ (44) $a_n = \sqrt[n]{n^4+2012n^3-5}$ (45) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

(46) $a_n = \frac{n!^2}{n^{2n}}$ (47) $a_n = \frac{5^n}{2^n+3^n+4^n}$ (48) $a_n = \frac{n+\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[7]{17n-8}}$

(49) $a_n = \frac{3n^3-n^2+11n}{n^4-2n^3}$ (50) $a_n = \left(\frac{5n+7}{3n+8}\right)^{2n-4}$ (51) $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

2. Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

   (a) Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2.

   (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

3. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ converge para 2.

4. Calcule $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}}$.

5. Neste exercício, estudaremos o método babilônio para extração de raízes quadradas. Dado um número real $\alpha > 0$, escolha $a_0 > 0$ qualquer e defina indutivamente

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\alpha}{a_n}\right)$$

   para cada $n > 0$. Se a_n é uma aproximação de $\sqrt{\alpha}$ por falta então α/a_n é uma aproximação de $\sqrt{\alpha}$ por excesso e vice-versa. O termo a_{n+1} é a média aritmética entre ambas as aproximações.

   (a) Mostre que $a_n^2 \geq \alpha$ para cada $n > 0$.

   (b) Mostre que $\{a_n\}$ é decrescente.

   (c) Mostre que existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ e calcule este valor.

6. Neste exercício, estudaremos o crescimento das somas parciais da série harmônica.

   (a) Sabemos que $\ln x = \int_1^x dt/t$, para qualquer $x > 0$. Interpretando a integral como área abaixo do gráfico, mostre que

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n,$$

   para todo $n \geq 2$.

(b) Mostre que $\ln 10 < \frac{12}{5}$ e conclua que para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{10^m} \le 1+\frac{12m}{5}.$$

Isso mostra que, embora a série harmônica seja divergente, suas somas parciais crescem muito lentamente. (Por exemplo, $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{10^{1000}} \le 2401$.)

(c) Considere a sequência $x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, $n \ge 1$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência decrescente limitada inferiormente. O número

$$\gamma \doteq \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$$

é chamado de *constante de Euler-Mascheroni* e vale aproximadamente 0.57721.

✰ Limites de funções

7. Calcule os seguintes limites, caso existam:

(1) $\lim_{x\to-2}\dfrac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$
(2) $\lim_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$
(3) $\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

(4) $\lim_{x\to1/2}\dfrac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}}$
(5) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{x^4+1}-1}{x^4}$
(6)$\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

(7) $\lim_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$
(8) $\lim_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(20x)}{\operatorname{sen}(301x)}$
(9) $\lim_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x))}{x}$

(10) $\lim_{x\to0}(\operatorname{tg}(3x)\operatorname{cossec}(6x))$
(11) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$
(12) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

(13) $\lim_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$
(14) $\lim_{x\to1}\dfrac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$
(15) $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$

(16) $\lim_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$
(17) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$
(18) $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(19) $\lim_{x\to1^+}\dfrac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$
(20) $\lim_{x\to2^-}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$
(21) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

(22) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x^2+7x-3}{2-x+5x^2-4x^3}$
(23) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$
(24) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$

(25) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$
(26) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}\right)$
(27) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$

(28) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$
(29) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+9}+x+3$
(30) $\lim_{x\to2}\dfrac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$

(31) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+x\cos(\sqrt{x})}{x^4\operatorname{sen}(1/x)+1}$
(32) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}(\operatorname{sen} x+\sqrt{x}\cos x)}{x\sqrt{x}-\operatorname{sen}(x\sqrt{x})}$
(33) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$

(34) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ (35) $\lim_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$ (36) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x+2x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{x-\sqrt{1+x^2}}$

(37) $\lim_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ (38) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}$ (39) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$

(40) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1}$ (41) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(x^2-1)}$ (42) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x+\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}(2x^2)+2012}{3x+x\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$

(43) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^6+3x^3+1}-x^3$ (44) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4-2x^2+1}{1-\cos(x^2-1)}$ (45) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x^3+8}$

(46) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}-x}{\sqrt{1-x}-1}$ (47) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1-\operatorname{sen} x+\cos(x^2)}{x^4+x^2}$ (48) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^3+\sqrt[3]{x}}-2\sqrt[4]{x^6+\pi}$

(49) $\lim\limits_{x\to1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

8. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que $\left|f(x)\right|\le 2|x|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3)}{x}$.

9. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $1+x^2+\dfrac{x^6}{3}\le f(x)+1\le \sec x^2+\dfrac{x^6}{3}$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ e

$$\lim_{x\to0}\left(f(x)\cos\left(\frac{1}{x+x^2}\right)\right).$$

10. Sejam $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $|\operatorname{sen} x|\le f(x)\le 3|x|$ e $0\le g(x)\le 1+|\operatorname{sen} x|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to0}(f(x)\,g(x)+\cos x)$.

11. Sejam $c, L\in\mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+cx+c}{x^2-1}=L$. Determine c e L.

12. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

    (a) Assumindo que $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$, calcule $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x}$.

    (b) Assumindo que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, calcule $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

    (c) Assumindo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x}=+\infty$, calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

13. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to0}}-1\right)}_{\to0}=\lim_{x\to+\infty}(x\cdot0)=0.$$

14. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

(a) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada positiva e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty.$$

(b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = +\infty.$$

(c) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = +\infty$.

15. Dê exemplos de funções f e g tais que:

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

    (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 1$.

    (c) $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

    (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) \neq 0$.

16. Mostre que se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e se g é limitada então $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$.

✰ Continuidade de Funções

17. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que as funções abaixo são contínuas. Justifique. (O símbolo $[x]$ denota o maior inteiro que é menor ou igual a x e é definido por $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.)

    (a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4)+5, & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{se } x < 2 \\ 5, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

    (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

    (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

    (d) $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{[x]}}{2} \operatorname{sen}(\pi x)$

    (e) $f(x) = x - [x]$

    (f) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right]$, $x \neq 0$

    (g) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (Função sinal)

    (h) $f(x) = |\operatorname{sen}(|2x + 37\cos x|)|$

18. Determine L para que a função dada seja contínua em $\mathbb{R}$.

    (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+2) - \operatorname{sen}(x+2)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

    (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^8+x^4}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

19. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Verifique que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por quê?

20. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x = 0$, então f é contínua em $x = 0$.

(b) Se f e g são funções descontínuas em $x = 0$, então a função fg é descontínua em $x = 0$.

✰ Respostas

(1)

- (2), (3), (12), (24), (39) são divergentes;
- (5), (7), (11), (14), (16), (17), (19), (21), (22), (25), (26), (27), (29), (30), (36), (43), (46), (49) convergem para zero;
- (1), (8), (15), (28), (32), (35), (38), (44), (45) convergem para 1;
- (31), (34), (47), (48), (50), (51) divergem para $+\infty$;
- (4) converge para 2; (6) converge para $1/4$; (9) converge para $3/2$; (10) converge para $1/2$; (13) converge para $2/5$; (18) converge para e; (20) diverge se $a < 0$, diverge para $+\infty$ se $a \geq 1$ e converge para zero se $0 \leq a < 1$; (23) converge para b; (33) converge para $1/e$; (37) converge para $e^{22/15}$; (40) converge para $4/e$; (41) converge para e; (42) converge para 4.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$; **(4)** A sequência converge para 2;

(7) (1) $-3/4$; (2) $1/5$; (3) $-1/6$; (4) 0; (5) $1/5$; (6) $3/7$; (7) $\sqrt{2}$; (8) $\frac{20}{301}$; (9) 2; (10) $1/2$; (11) $1/6$; (12) -1; 13) -1; 14) $1/3$; (15) $-\infty$; (16) 0; (17) não existe; (18) não existe; (19) 0; (20) $-\infty$; (21) $+\infty$; (22) $-1/2$; (23) 0; (24) $1/3$; (25) 1; (26) $-\infty$; (27) 0; (28) $-\infty$; (29) 3; (30) $32\sqrt{2}$; (31) 3; (32) 0; (33) $-\sqrt[4]{7}/2$; (34) $1/2$; (35) não existe; (36) $-\infty$, (37) 1; (38) $\frac{a-b}{2}$; (39) $-\infty$; (40) $1/2$; (41) $1/4$; (42) $3/2$; (43) $3/2$; (44) 2; (45) $-1/48$; (46) $2/3$; (47) 0; (48) $1/6$; (49) $\pi/6$;

(8) 0; **(9)** 0; 0; **(10)** 1; **(11)** $c = -1$, $L = 5/2$; **(12)** (a) 2; (b) 0; (c) $+\infty$; **(13)** $1/2$; **(14)** (a) Falsa; (b) Verdadeira; (c) Falsa;

(17)(a) $\mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; (c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; (d) $\mathbb{R}$; (e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; (f) $\{x \in \mathbb{R} : 1/x \notin \mathbb{Z},\ x \neq 0\}$; (g) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; (h) $\mathbb{R}$; **(18)** (a) $-\cos 2$; (b) 1; **(19)** Não; **(20)** (a), (b) são falsas;