UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Prof. José Carlos Eidam
MA22/PROFMAT - Fundamentos de Cálculo

2a Lista de Exercícios

✰ Derivadas

1. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto $\mathbf{I}$, $a \in \mathbf{I}$ e

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq a \\ g(x), & \text{se } x < a \end{cases}.$$

Prove que h é derivável em $x = a$ se, e somente se, $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

2. Encontre constantes a, b e c tais que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) = 0$.

3. Verifique se f é contínua e derivável no ponto x_0, sendo:

(a) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)\cos\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x, & \text{se } x > 0 \\ x^5 + 4x^3, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}x^5, & \text{se } x > 1 \\ x^4, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

(e) $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

(h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

(i) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $x_0 = 0$

j) $f(x) = |\operatorname{sen}(x^5)|$, $x_0 = 0$

k) $f(x) = \cos(\sqrt{|x|})$, $x_0 = 0$

4. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}[(3+x)^2] - \operatorname{tg} 9}{x}$.

5. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

2) $f(x) = \dfrac{(2x^3+1)^{32}}{x+2}$

3) $f(x) = \dfrac{4x - x^4}{(x^3+2)^{100}}$

4) $f(x) = x\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^5} - x^2\right)$

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{(x^4 + \operatorname{tg}^2 x + 1)^2}$

6) $f(x) = \sqrt[6]{x \operatorname{tg}^2 x}$

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\operatorname{cossec} x}{x^3+3x^2}$ 8) $f(x)=\sec\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ 9) $f(x)=\dfrac{x^2\operatorname{tg}(x^3-x^2)}{\sec x}$

10) $f(x)=x\operatorname{sen} x\cos x$ 11) $f(x)=\dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4+\lambda^4}$ 12) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x-\operatorname{sen} x)}$

13) $f(x)=\dfrac{2x}{\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$ 14) $f(x)=\operatorname{cotg}(3x^2+5)$ 15) $f(x)=\dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^{33}x\cos^{17}x}$

16) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}\operatorname{sen} x}{x^2\cos(x^2)}$

6. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|\le|x^3+x^2|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. A função f é derivável em 0?

7. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável em $a\in\,]0,+\infty[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

8. Discuta as seguintes "soluções" para a questão "Considere a função $f(x)=x|x|$. Decida se f é derivável em $x=0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações."

   "Solução 1": $f'(0)=0$, pois $f(0)=0$.

   "Solução 2": Como a função $g(x)=|x|$ não é derivável em $x=0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x=0$. Logo f não é derivável em $x=0$.

   "Solução 3": Temos $f(x)=h(x)g(x)$, onde $h(x)=x$ e $g(x)=|x|$. Assim:

$$f'(0)=h'(0)g(0)+h(0)g'(0);$$

   como $g(0)=0$ e $h(0)=0$ então $f'(0)=0$.

   "Solução 4": Temos $f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{se } x<0\\ x^2, & \text{se } x\ge 0\end{cases}$. Logo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x=0,$$

   e

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}-x=0.$$

   Portanto $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$, ou seja $f'(0)=0$.

9. Em que pontos f é derivável?

   (a) $f(x)=\sqrt{x^4+x^6}$ (b) $f(x)=\sqrt{x^2+x^4}$.

10. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável em $x=0$ tal que $f(0)=f'(0)=0$. Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função limitada e não derivável em $x=0$. Calcule a derivada de $h(x)=f(x)\,g(x)$ no ponto $x=0$.

11. Seja $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x})$.

    (a) Calcule $f'(3)$.

    (b) Calcule $f'(0)$.

    (c) Seja $g(x)=\dfrac{(5+f(x))(2x+3\sec x)}{x+\operatorname{tg} x+4}$, onde f é a função dada acima. Calcule $g'(0)$.

12. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência.

13. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.

14. Seja $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(0,0)$.

15. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até $2^{\underline{a}}$ ordem e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = xf(x + 1 + \operatorname{sen} 2x)$. Calcule $g''(x)$. Supondo $f'(1) = -2$, calcule $g''(0)$.

16. Seja $f(x) = |x^3|$. Calcule $f''(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f'' é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique.

17. Sabe-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $x + 2y = 6$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (f(\sqrt{9+4x}))^2$. Determine $g'(0)$.

18. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ tem como intersecção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

19. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2-y)$. Admitindo f derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$.

20. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 + xy + y^2 = 3$. Admitindo f derivável, determine as possíveis retas tangentes ao gráfico de f que são normais à reta $x - y + 1 = 0$.

21. Seja f derivável num intervalo aberto I contendo $x = -1$ e tal que

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 + xf(x) = 2,$$

para todo $x \in I$. Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.

22. Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa f^{-1} seja também derivável. Use derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja nulo.

23. Usando o exercício anterior, encontre $(f^{-1})'(5)$ sabendo que $f(4) = 5$ e que $f'(4) = \frac{2}{3}$.

24. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \cos(\operatorname{arctg} x)$	(b) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$	(c) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2)$
(d) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^3$	(e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$	(f) $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}})$
(g) $f(x) = \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x$	(h) $f(x) = x \operatorname{arctg}(x^2 - x)$	(i) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$

✰ Taxas relacionadas

25. (*Expansão Adiabática*) Quando certo gás composto sofre uma expansão adiabática, a sua pressão p e seu volume V satisfazem à equação $pV^{1,3} = k$, onde k é uma constante. Mostre que $-V\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 1,3\,p\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.

26. De um petroleiro quebrado vaza um grande volume V de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petróleo se expande num contorno circular de raio r e espessura uniforme h, onde r cresce e h de cresce de um modo determinado pela viscosidade e flutuabilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido: $h = \dfrac{c}{\sqrt{t}}$. Mostre que a taxa $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a $t^{3/4}$.

27. Num certo instante t_0, a altura de um triângulo cresce à razão de 1 cm/min e sua área aumenta à razão de 2 cm^2/min. No instante t_0, sabendo que sua altura é 10 cm e sua área é 100 cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo?

28. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1,2$ m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081\mathrm{m}^3$/min. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?

29. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante t_0, o seu volume cresce a uma taxa de $10\mathrm{cm}^3$/min. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo?

30. Uma lâmpada está no solo a 15m de um edifício. Um homem de $1,8$m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a $1,2$m/s. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício.

31. Uma tina de água tem 10 m de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de $0,2$ m^3/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30 cm de profundidade?

32. Uma câmera de televisão está posicionada a 4.000 pés de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa que possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com uma velocidade de 600 pés/s quando já tiver subido 3.000 pés. Quão rápido está variando a distância da câmera ao foguete nesse momento? Se a câmera de televisão apontar sempre na direção ao foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela nesse mesmo momento?

33. (*Escada deslizante*) Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a 7 pés da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo.

    (a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?

    (b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.

    (c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

☆ Teoremas do valor intermediário e do valor médio

34. Seja $h(x) = 2x + \cos x$.

(a) Mostre que h é bijetora.

(b) Calcule $h^{-1}(1)$.

(c) Admitindo h^{-1} derivável, determine $(h^{-1})'(1)$.

35. Seja $f(x) = e^x - \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$, $x > 0$.

    (a) Mostre que a equação
    $$e^x - \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = y$$
    admite uma única solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Conclua que f admite inversa.

    (b) Seja g a inversa de f. Mostre que $|g(x) - g(y)| \leq 2|x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

36. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x + x^3$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

    (a) Mostre que a equação $\operatorname{tg} x + x^3 = y$ admite uma única solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Conclua que f admite inversa.

    (b) Seja g a inversa de f. Mostre que $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

37. Seja $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 7x$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que f é inversível e sobrejetora.

    (b) Calcule f^{-1} em termos de f.

    (c) Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a inversa de f, mostre que $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{7}|x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

38. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$, g a sua inversa e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que
    $$g(b) - g(a) \leq \frac{1}{2}(b - a).$$

39. Seja $f(x) = x^7 + 8x^3 - x^5 - 8x$. Prove que $f'(x)$ tem duas raízes distintas no intervalo $]-1, 1[$.

40. Use o teorema do valor médio para provar as seguintes desigualdades:

    (a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

    (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

    (c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \leq |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

    (d) $b^b - a^a > a^a(b - a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq a < b$.

    (e) $e^x - e^y \geq x - y$, para todos x, y com $x \geq y \geq 0$.

41. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \leq x$, para todos $x > 0$.

42. Mostre que $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$. Conclua que
    $$(1 + \pi)^e < (1 + e)^\pi.$$

43. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$

(b) $e^{\pi} > \pi^{e}$

(c) $\dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} > \dfrac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

(d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $x > 0$

(e) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$, para $x > 0$

(f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, para $x > 0$

(g) $e^x > 1 + x$ para $x > 0$

(h) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ para $x > 0$

(i) $x^n - 1 \geq n(x-1)$ para $x \geq 1$

44. Mostre que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real e tente localizá-la.

45. Mostre que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite três raízes reais e tente localizá-las.

46. Determine os possíveis valores de a para os quais a equação

$$x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$$

admite uma única raiz real.

47. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

48. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 é ponto de máximo local de g. Prove que

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

49. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

50. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que se $f'(a)f'(b) > 0$, então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

51. Para que valores de k a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três raízes reais distintas ?

52. Prove que se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais. (Sugestão: Divida por x^n para um certo n suficientemente grande.)

53. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0. Prove que se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f, então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f.

54. Mostre que

(a) $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \dfrac{\pi}{2}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(b) $2\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen}(1 - 2x^2)$, $-1 < x < 1$

55. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{ax-1}{ax+1}\right)^x = 4$. Determine a.

✰ Funções exponencial e logarítmica

56. Suponha que você receba as duas propostas abaixo para trabalhar por um mês:

    A. Você recebe 1 milhão de reais no final do período.

    B. Você recebe 1 centavo no primeiro dia, 2 centavos no segundo dia, 4 centavos no terceiro dia, e, em geral, 2^{n-1} centavos no n-ésimo dia.

    Qual delas é mais lucrativa?

57. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (b) $\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (c) $f(x) = e^{e^x}$

(d) $f(x) = x^e + e^x$ (e) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

(j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ (l) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\operatorname{sen} x}$

(m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$ (n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$

(p) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$ (q) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$ (r) $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$

(s) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (t) $f(x) = x^{\ln(x^2+1)}$ (u) $f(x) = (1 - \operatorname{sen} x)^{x^3-1}$

58. Calcule, caso exista

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(d) $\lim\limits_{x\to1^+} (\ln x)^{(x-1)}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^{2x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x}{e^{x^2}}$

(g) $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha \ln x$, $\alpha > 0$ (h) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)$ (i) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right]$ (k) $\lim\limits_{x\to0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ (l) $\lim\limits_{x\to0} (e^x + 3x)^{1/x}$

(m) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (n) $\lim\limits_{x\to0^+} \left[\dfrac{1}{x} + \ln x\right]$ (o) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

(p) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$ (q) $\lim\limits_{x\to0} (1 + \operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{sen} x}$ (r) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x \operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

(s) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$ (t) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\ln 2/(1+\ln x)}$ (u) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+3x)^{1/\ln x}$

(v) $\lim\limits_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$ (w) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$ (x) $\lim\limits_{x\to0^-} (1 - \cos x)^{1/x}$

59. No seu livro de Cálculo de 1696, l'Hospital ilustrou sua regra com o limite da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando $x \to a$, $a > 0$. Calcule este limite.

✰ Funções hiperbólicas

60. Mostre que a função $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ é inversível e sua inversa é dada por

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Encontre as inversas das demais funções hiperbólicas e também suas derivadas.

61. Mostre que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ e $\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

62. Mostre que $\cosh(x+y) = \sinh x \sinh y + \cosh x \cosh y$ e $\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \cosh y \sinh x$, $x, y \in \mathbb{R}$.

63. Esboce os gráficos de todas as funções hiperbólicas e de suas inversas.

✰ Máximos e mínimos

64. Encontre $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ tenha:

    (a) um mínimo local em $x = 2$.

    (b) um mínimo local em $x = -3$.

    (c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a.

65. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

    (b) Determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

66. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$.

    (b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

67. Seja f uma função. Se existir uma reta $y = mx + n$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$, dizemos que $y = mx + n$ é uma **assíntota** para f. Prove que a reta $y = mx + n$ é uma assíntota para f se, e somente se, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n$. (Tudo o que dissemos para $x \to +\infty$ vale também para $x \to -\infty$.)

68. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$	(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$	(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
(d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$	(e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$	(f) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$
(g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$	(h) $f(x) = e^x - e^{3x}$	(i) $f(x) = x - 3\ln x - \dfrac{2}{x}$
(j) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$	(k) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$	(l) $f(x) = x^x$
(m) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2 + 3)$	(n) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$	(o) $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$
(p) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+2}$	(q) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$	(r) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$
(s) $f(x) = x^2 \ln x$	(t) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$	(u) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$
(v) $f(x) = x^3 + x^2 + x$	(w) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$	(x) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

69. Achar os valores mínimo e máximo de:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0,\pi]$

(b) $f(x) = \sqrt{3+2x-x^3}$, $-\frac{1}{2} \le x \le 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \le x \le 4$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-2x^2}$, $-1 \le x \le 2$

(e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \le x \le 3$

(f) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$, $-2 \le x \le 3$

(g) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $-2 \le x \le 1$

(h) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2} - x^3 + 4x^2 - 4x + 1$, $-3 \le x \le 3$

70. Para que números positivos a a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$?

71. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta:

(a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(c) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(d) Se existe uma assíntota para f (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular m e se existe
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L,$$
então $L = m$.

(e) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

✰ Respostas

(1) $a = -3/2$, $b = 0$ e $c = 7/2$; **(2)** (a), (c), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k) são contínuas em x_0; (f), (g), (j) são deriváveis em x_0; **(3)** $6\sec^2 9$; **(5)** Sim; **(6)** $2\sqrt{a}f'(a)$; **(7)** Somente (4) está correta; **(8)** (a) em todos os pontos; (b) em $x_0 \neq 0$; **(9)** 0; **(25)** (a) $\frac{7}{3\sqrt[3]{12}}\operatorname{sen}(\sqrt[3]{3}) + \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\cos(\sqrt[3]{3})$.; (b) -1; (c) $-\frac{1}{8}$;

(11) $(3,-3)$; **(12)** $(-1,-13)$, $y = 16x+3$; $(0,7)$, $y = 16x+7$; $(1,19)$, $y = 16x+3$; **(13)** $y = 9x$, $y = -x$; **(14)** -12; **(15)** Não; **(16)** -1; **(18)** $y = x$; **(19)** $y + x = 2$; $y + x = -2$; **(20)** 2; $2x + 7y - 12 = 0$; **(26)** $-1{,}6$; **(27)** $\frac{1}{40\pi}$m/min; **(28)** $\dfrac{4}{3}$cm^2/min; **(29)** 3,6m/s; 0,9m/s; **(30)** $\frac{10}{3}$cm/min; **(31)** 360 pes/s; 0,096 rad/s; **(32)** (a) $\frac{7}{12}$pes/s; (b) $\frac{527}{24}$pes^2/s; (c) $\frac{1}{12}$rad/s.

(34) (b) 0; (c) $\dfrac{1}{2}$; **(46)** $a > 5$ ou $a < -27$; **(51)** $4 < k < 5$; **(55)** $a = 1/\ln 2$; **(56)** B;

(58) (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 1; (e) 0; (f) 0; (g) 0; (h) α; (i) $\frac{1}{6}$; (j) 1; (k) 1; (l) e^4; (m) 1; (n) $+\infty$; (o) $\frac{2}{3}$; (p) 1; (q) e^2; (r) 3; (s) $-\dfrac{1}{2}$; (t) 2; (u) e; (v) e; (w) 1; (x) $+\infty$; **(59)** $\dfrac{16a}{9}$; **(64)** (a) $a = 16$; (b) $a = -54$;

(65) Não há soluções se $k < 0$; tem 1 solução se $k = 0$ ou $k > \dfrac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k = \dfrac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0 < k < \dfrac{4}{e^2}$.

(66) (a) $x_0 = 1$; **(69)** (a) -1, $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{\frac{17}{8}}$, $\sqrt{3+\sqrt{\frac{32}{27}}}$; (c) 4, 1; (d) $-\sqrt[3]{3}$, 0; (e) 0, 27; (f) $-87/4$, 7; (g) -27, 0; (h) $f(-3)$, $f(-2)$; **(70)** $a \leq e^{\frac{1}{e}}$;

(71) (b) e (d) são verdadeiras e (a), (c), (e) são falsas.