UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
MA22 - Fundamentos de Cálculo - PROFMAT
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

SEGUNDA PROVA - 08/06/2013

Nome: ____

Assinatura: ____

ATENÇÃO!

1. Não é permitido consultar livros e/ou anotações, tampouco comunicar-se com os demais alunos durante a prova;
2. Faça a prova a lápis;
3. A prova tem duração de **3** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
4. O gabarito estará disponível no site da disciplina após a realização da prova;
5. Você deve justificar suas respostas;
6. Boa prova!

zeca77@gmail.com
eidam@ufpr.br

Questão 1 (3 pontos) Considere a função

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}, \ |x| \neq 1.$$

Determine e classifique os pontos críticos de f, determine os pontos de inflexão de f, calcule os limites que julgar importantes, determine as assíntotas e esboce o gráfico de f.

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

; PONTOS CRÍTICOS: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$

SINAL DE f'

$++ \quad -\sqrt{3} \quad ---- \quad 0 \quad ---- \quad \sqrt{3} \quad ++$

x_2 : MÁX. LOCAL

x_3 : MÍN. LOCAL

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

SINAL DE f''

$--- \quad -1 \quad +++ \quad 0 \quad --- \quad 1 \quad ++$

$x_1 = 0$: PTO. DE INFLEXÃO

LIMITES

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{x^3}{x^2-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to -1^\pm} \frac{x^3}{x^2-1} = \pm\infty$$

ASSÍNTOTAS VERTICAIS

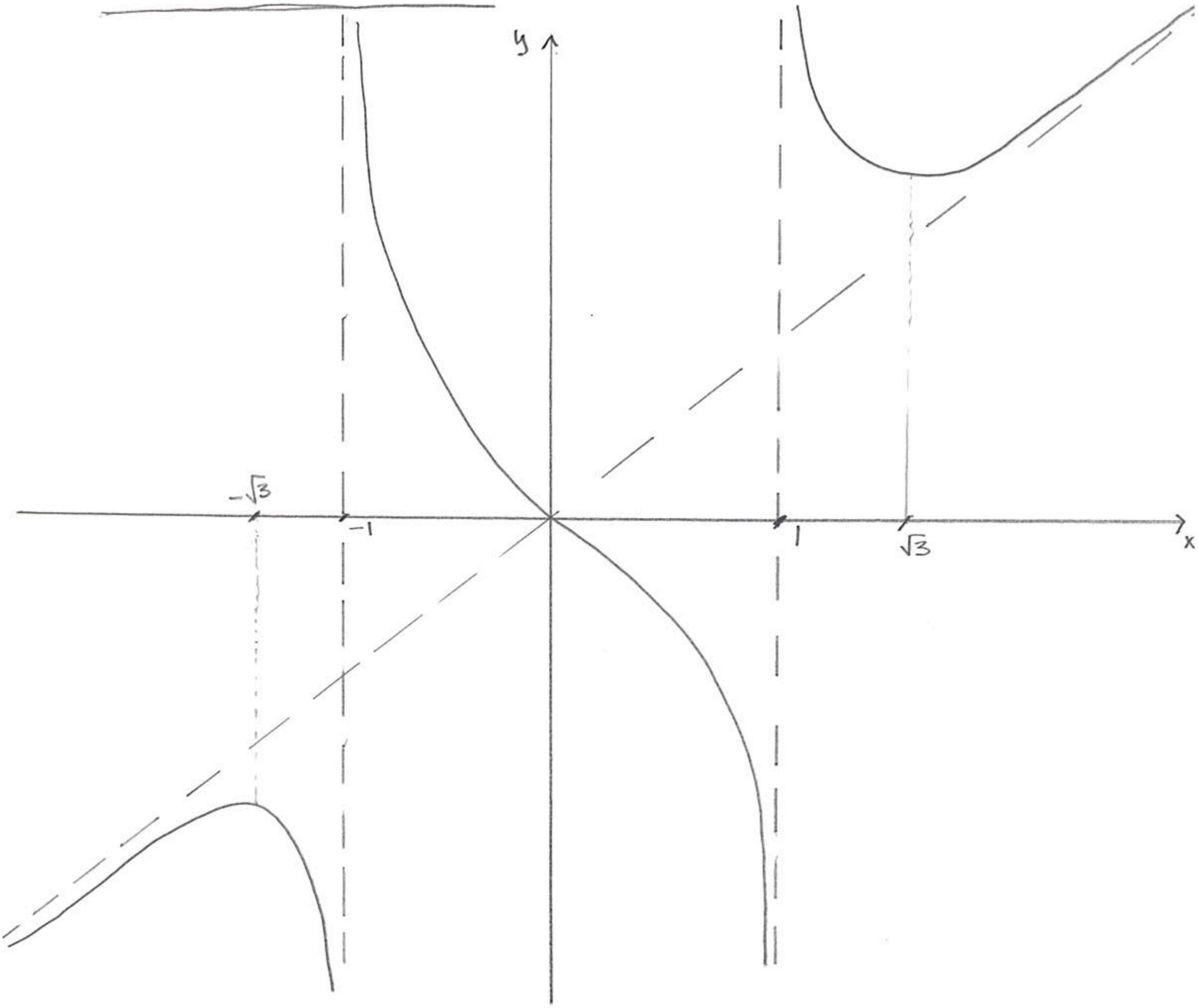
$x = -1$ E $x = 1$

ASSÍNTOTA INCLINADA

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} \xrightarrow{|x| \to \infty} 0$$

$\therefore$ $y = x$ É ASSÍNTOTA INCLINADA.

ESBOÇO DO GRÁFICO



Questão 2 **(2 pontos)** Considere a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}.$$

Sabendo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, determine a imagem de f.

$f'(x) = (2-x^2)\,e^{-x}$ $\therefore$ $x_1 = \sqrt{2}$ É PONTO DE MÁXIMO LOCAL.

COMO ESTE É O ÚNICO PONTO CRÍTICO DE f E $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

ENTÃO, x_1 É MÁXIMO GLOBAL. ASSIM, A IMAGEM DE f É, PELO TEO. DO VALOR INTERMEDIÁRIO, O INTERVALO

$$[f(0), f(\sqrt{2})] = [0,\ 2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}].$$

Questão 3 (2 pontos) Discuta o número de raízes reais do polinômio $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + C$ em função do parâmetro $C \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$

PONTOS CRÍTICOS $\quad x_1 = 0$

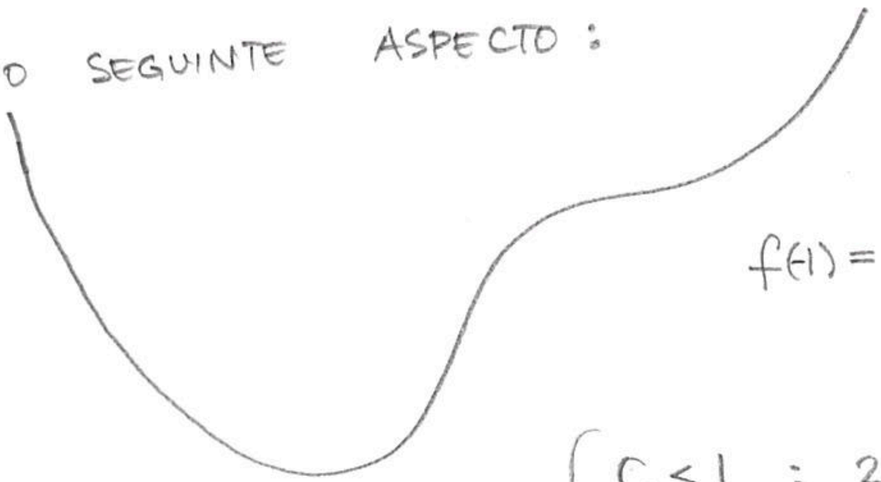
$x_2 = -1$: MÍNIMO LOCAL

$$f''(x) = 36x^2 + 24x = 12x(3x+2)$$

PONTOS DE INFLEXÃO

$x_1 = 0 \quad , \quad x_3 = -2/3$

COMO f NÃO POSSUI OUTROS PONTOS CRÍTICOS, SEGUE QUE x_2 É MÍNIMO GLOBAL. GENERICAMENTE, O GRÁFICO DE f TEM O SEGUINTE ASPECTO :



$f(-1) = 3 - 4 + C = C - 1$

LOGO, PELO TVI, TEMOS

$$\begin{cases} C < 1 & : \text{2 RAÍZES REAIS} \\ C = 1 & : \text{1 RAIZ REAL} \\ C > 1 & : \text{NENHUMA RAIZ REAL.} \end{cases}$$

Questão 4 Considere a equação

$$(1+x^2)^x = y \qquad (1)$$

para $x \geq 0$ e $y \geq 1$.

(a) **(1 ponto)** Mostre dado qualquer $y \geq 1$, a equação (1) tem uma única solução $x \in \mathbb{R}$, ou seja, a função $f(x) = (1+x^2)^x$, $x \geq 0$, admite uma inversa, a qual chamamos de g.

$$f'(x) = (1+x^2)^x \left(\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} \right) > 0 \quad \text{SE } x > 0$$

$\therefore$ f É CRESCENTE, EM PARTICULAR, INJETORA.

COMO $f(0) = 1$ E $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ E f É CONTÍNUA, SEGUE DO TVI QUE $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ É SOBRE. LOGO, f É BIJETORA.

(b) **(1 ponto)** Determine $g'(y)$ implicitamente em termos de $g(y)$.

SE $y = f(x)$ ENTÃO $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(g(y))}$ $\therefore$

$$g'(y) = \frac{1}{(1+g(y)^2)^{g(y)} \left(\ln(1+g(y)^2) + \dfrac{2g(y)^2}{1+g(y)^2} \right)}.$$

(b) **(1 ponto)** Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(2, g(2))$. Use isto para determinar soluções aproximadas para a equação $(1+x^2)^x = 2,01$.

COMO $f(1) = 2$ ENTÃO $g(2) = 1$. TEMOS $g'(2) = \dfrac{1}{2(\ln 2 + 1)}$

E A RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE g EM $(2, g(2))$ É $\dfrac{y - g(2)}{x - 2} = g'(2) \Rightarrow y = 1 + \dfrac{x-2}{2(\ln 2 + 1)}$.

UMA SOLUÇÃO APROXIMADA P/ A EQ. DADA É

$$x = 1 + \frac{2,01 - 2}{2(\ln 2 + 1)} = 1 + \frac{0,01}{2(\ln 2 + 1)}.$$