UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
MA22 - Fundamentos de Cálculo - PROFMAT
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 27/04/2013

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações, tampouco comunicar-se com outras pessoas durante a realização da prova;
2. Faça a prova a lápis;
3. Você deve justificar todas as suas respostas e pode utilizar na resolução das questões todos os resultados vistos em aula;
4. Esta avaliação tem duração de **3** horas;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da avaliação;
6. Boa prova!

Questão 1 Calcule, se existir, o limite de cada uma das sequências abaixo (cada ítem vale **1 ponto**):

(a) $x_n = \sqrt{n}\cos(2n! + 2013)\operatorname{sen}(1/n)$

$$x_n = \cos(2n! + 2013) \cdot \sqrt{n}\,\operatorname{sen}(1/n)$$

$$= \underbrace{\cos(2n! + 2013)}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \cdot \underbrace{1/\sqrt{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(b) $x_n = \left(\dfrac{7n+13}{7n-5}\right)^{2n-3}$

$$x_n = \left(\frac{7n-5+18}{7n-5}\right)^{2n-3}$$

$$= \left(1 + \frac{18}{7n-5}\right)^{2n-3}$$

POIS $2n-3 = \frac{2}{7}(7n-5) - \frac{11}{7}$

$$= \left(1 + \frac{18}{7n-5}\right)^{\frac{2}{7}(7n-5) - \frac{11}{7}}$$

$$= \left\{\left(1 + \frac{18}{7n-5}\right)^{7n-5}\right\}^{2/7} \cdot \left(1 + \frac{18}{7n-5}\right)^{-11/7}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \left(e^{18}\right)^{2/7} \cdot 1 = e^{36/7}.$$

(c) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!^3}}$

SEJA $y_n = \dfrac{(3n)!}{n!^3} \therefore \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{(3n+3)!}{(n+1)!^3} \cdot \dfrac{n!^3}{(3n)!}$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \underset{\div n^3}{\overset{\div n^3}{=}} \frac{\left(3+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 27.$$

COMO $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} \longrightarrow 27$ ENTÃO $x_n = \sqrt[n]{y_n} \longrightarrow 27$.

(d) $x_n = \sqrt[n]{5^n + 7n + \operatorname{sen} n}$

TEMOS QUE $-1 \leq \operatorname{sen} n \leq 1$ E $0 \leq n \leq 5^n$, PARA TODO $n \in \mathbb{N}$ $\therefore$

$$\underset{\underset{5^{n-1}}{\text{\rotatebox{90}{$\leq$}}}}{5^n - 1} \leq 5^n + 7n + \operatorname{sen} n \leq 5^n + 7\cdot 5^n + 1 \leq \underset{\underset{9\cdot 5^n}{\|}}{5^n + 7\cdot 5^n + 5^n}$$

LOGO, $\sqrt[n]{5^{n-1}} \leq \sqrt[n]{5^n + 7n + \operatorname{sen} n} \leq \sqrt[n]{9\cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{9}$

$$1 \xleftarrow{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt[n]{5}} \leq x_n \leq 5\sqrt[n]{9} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

PORTANTO, $x_n \longrightarrow 5$, PELO TEOREMA DO CONFRONTO.

Questão 2 Calcule, se existirem, os seguintes limites (cada ítem vale **1 ponto**):

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}} = \lim_{u\to 1} \frac{u^{30}-u^{20}}{u^{15}-u^{12}}$

$x = u^{60}$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^{18}-u^{8}}{u^{3}-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} u^{8} \cdot \frac{u^{10}-1}{u^{3}-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} u^{8} \frac{u^{9}+u^{8}+\dots+u+1}{u^{2}+u+1}$$

$$= \frac{10}{3}.$$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{11x^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\sqrt{x}\cos(4x^2)+\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{1+x^2}-3x+5} \overset{\div x}{\underset{\div x}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{11\underbrace{\frac{\mathrm{sen}(1/x)}{1/x}}_{x\to+\infty\ 1} - \underbrace{\frac{\cos(4x^2)}{\sqrt{x}}}_{x\to+\infty\ 0} + \underbrace{\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}}_{x\to+\infty\ 0}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3+5/x}$

$$= \frac{11-0+0}{1-3+0} = -\frac{11}{2}.$$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^6+\sqrt{5x^6+1}}-3x^3 = \lim_{x\to\infty} \dfrac{9x^6+\sqrt{5x^6+1}-9x^6}{\sqrt{9x^6+\sqrt{5x^6+1}}+3x^3}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x^6+1}}{\sqrt{9x^6+\sqrt{5x^6+1}}+3x^3} \quad \begin{matrix} \div x^3 \\ \div x^3 \end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5+1/x^6}}{\sqrt{9+\sqrt{5/x^6+1/x^{12}}}+3}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}+3} = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

(d) $\lim_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^6-3x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to0} \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^6-3x}\right)}{\sqrt[3]{x^6-3x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{\sqrt[3]{x^6-3x}}{x^2}}_{(*)}$

$(*)$ $\lim_{x\to0^\pm} \dfrac{\sqrt[3]{x^6-3x}}{x^2} = \lim_{x\to0^\pm} \sqrt[3]{1-\dfrac{3}{x^5}} = \mp\infty$

$\therefore \lim_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^6-3x}\right)}{x^2}$

Questão 3 (2 pontos) Determine o valor de a para que a função abaixo, definida em $(0,\pi)$, seja contínua em $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt[7]{\operatorname{sen} x}}{\cos^2 x} & , \text{ se } x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & , \text{ se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sqrt[7]{\operatorname{sen} x}}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sqrt[7]{\operatorname{sen} x}}{1-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\boxed{u = \sqrt[7]{\operatorname{sen} x}} \qquad = \lim_{u\to 1} \frac{1-u}{1-u^{14}}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{1-u}{(1-u)(1+u+u^2+\dots+u^{12}+u^{13})}$$

$$= \frac{1}{14}.$$

Questão 4 **(2 pontos)** Considere a sequência dada indutivamente por $x_1 = \sqrt{7}$ e $x_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$, para cada $n \geq 1$. Mostre que $\{x_n\}$ é convergente e calcule seu limite.

(★) $x_n \leq 7$ PARA TODO $n \in \mathbb{N}$:

DE FATO, $x_1 = \sqrt{7} \leq 7$. ALÉM DISSO, SE PARA UM CERTO $n \in \mathbb{N}$, TIVERMOS $x_n \leq 7$ ENTÃO

$$x_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \leq \sqrt{7+7} = \sqrt{14} \leq 7,$$

POIS $14 \leq 7^2 = 49$.

(★★) $\{x_n\}$ É CRESCENTE:

TEMOS QUE $x_1 = \sqrt{7} \leq \sqrt{7 + \sqrt{7}} = x_2$. ALÉM DISSO, SE $x_n \leq x_{n+1}$ ENTÃO $7 + x_n \leq 7 + x_{n+1}$; TOMANDO A RAIZ QUADRADA, TEM-SE

$$x_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \leq \sqrt{7 + x_{n+1}} = x_{n+2},$$

COMO QUERÍAMOS.

LOGO, $\{x_n\}$ É UMA SEQUÊNCIA MONÓTONA LIMITADA

$\therefore$ EXISTE $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$. COMO $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha$

E $x \geq 0 \longmapsto \sqrt{x} \geq 0$ É CONTÍNUA, TEMOS

QUE

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{7+x_n}$$

$$\alpha = \sqrt{7+\alpha}$$

$$\therefore \quad \alpha^2 = 7+\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha^2-\alpha-7=0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

COMO $x_n \geq \sqrt{7} > 0$, P/ TODO $n \in \mathbb{N}$, O VALOR $\frac{1-\sqrt{29}}{2}$ É INCONVENIENTE. ASSIM, $\alpha = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\simeq 3,6926$