UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM076 - Introdução à Teoria de Integração
Prof. José Carlos Eidam

PRIMEIRA PROVA - 09/10/2013

Nome: ____

Assinatura: ____

ATENÇÃO!

1. Você pode utilizar *todos* os resultados provados em aula e deve justificar todas as suas respostas;
2. A sua nota dependerá mais da qualidade de suas resoluções do que da quantidade de questões que vc resolver. Mas, mesmo assim, tente resolver o máximo que puder!
3. A data final para entrega é **25/10/2013**.
4. Boa prova!

Questão 1 (a) Sejam $A \subset \mathbb{R}$ denso e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(a,\infty)$ é mensurável para todo $a \in A$. Mostre que f é mensurável.

(b) Encontre subconjuntos $E, F \subset \mathbb{R}$ tais que $E \cup F = \mathbb{R}$, E tem medida nula e F é *magro*.[1]

(c) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é mensurável e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua então $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são mensuráveis.

(d) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é mensurável e $B \subset \mathbb{R}$ é boreliano então $f^{-1}(B)$ é boreliano.

(e) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável limitada. Dado $\epsilon > 0$, mostre que existe uma função escada[2] $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f - \phi| \le \epsilon$.

(f) Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\epsilon > 0$ então existe uma função *contínua* $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\{x \in [a,b] : \phi(x) \neq f(x)\}$ tem medida $< \epsilon$.

(g) Construa um boreliano $E \subset [0,1]$ de interior vazio e medida 1.

(h) Mostre que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $B \subset \mathbb{R}$ é um boreliano então $I + B$ é um boreliano.[3]

(i) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que o conjunto dos pontos onde f é diferenciável é mensurável.

(j) Dada uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções $f_n : E \to \mathbb{R}$ mensuráveis e $E \subset \mathbb{R}$ boreliano, mostre que os conjuntos E_j abaixo são mensuráveis:

(a) E_1 é o conjunto dos pontos $x \in E$ para os quais a sequência $\{f_n(x - [x])\}_{n\in\mathbb{N}}$ está definida, converge e a função limite é contínua.

(b) E_2 é o conjunto formado pelos $x \in \mathbb{R}$ tais que a sequência

$$\{\operatorname{sen}(f_n(x)^2 - 1) + e^{\pi|f_n(x)|^7}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

é monótona (crescente ou decrescente), converge para um número transcendente ou inteiro e a função limite é contínua em x.

(c) Assumindo que E seja um intervalo aberto e exista $f(x) \doteq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, definimos E_3 como o conjunto dos pontos nos quais f é diferenciável.

Questão 2 Calcule os seguintes limites:

1. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) dx$

2. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^n x}{x^2} dx$

3. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} dx$

---

[1] Isto significa, por definição, que F está contido em uma reunião enumerável de fechados com interior vazio. Veja o livro *Measure and Category*, John Oxtoby.

[2] Uma *função escada* é uma função da forma $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{I_j}$, onde cada $I_1, \ldots, I_n$ são intervalos de $\mathbb{R}$.

[3] Mostre que o conjunto dos B's satisfazendo esta condição é uma σ-álgebra contendo os intervalos. Tenha cuidado: a soma de borelianos em geral pode nem ser mensurável!

4. $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}dx$

5. $\lim_{n\to\infty}\int_0^{1}\frac{n\operatorname{sen}x}{1+n^2\sqrt{x}}dx$

Questão 3 Uma família não-vazia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de um conjunto X é dita uma *álgebra* se for fechada por complementares, reuniões e intersecções finitas. Uma *pré-medida em* $\mathscr{A}$ é uma função $\mu_0 : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ tal que:

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$;

2. Se $\{E_n\}_n$ é uma família de conjuntos disjuntos em $\mathscr{A}$ cuja reunião pertence a $\mathscr{A}$ então $\mu_0\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu_0(E_n)$.

Nesta questão, vamos mostrar como passar de uma pré-medida em uma álgebra para uma medida em uma σ-álgebra.

1. Mostre que a família $\mathscr{A}$ formada por todas as reuniões finitas de intervalos de $\mathbb{R}$ é uma álgebra e $I \mapsto |I|$ é uma pré-medida em $\mathscr{A}$.

2. Se μ_0 é uma pré-medida em $\mathscr{A}$, defina

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_n \mu_0(E_n) : E_n \in \mathscr{A},\ E \subset \bigcup_n E_n\right\}.$$

   Mostre que μ^* é uma *medida exterior* em X, i.e., $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ se $A \subset B$ e $\mu^*\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu^*(E_n)$.

3. Um subconjunto $E \subset X$ é dito μ^**-mensurável* (ou *mensurável segundo Carathéodory*) se satisfizer à condição milagrosa

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E),$$

   para todo $A \subset X$. Mostre que a família $\mathscr{M}$ formada pelos conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra e a restrição de μ^* a $\mathscr{M}$ é uma medida.

4. No ítem anterior, mostre que se ν é uma medida em uma σ-álgebra contendo $\mathscr{M}$ tal que $\nu A = \mu A$ para todo $A \in \mathscr{A}$ então $\nu E = \mu E$ para todo $E \in \mathscr{M}$ tal que $\mu E < \infty$. Se μ é σ-finita (i.e., X é reunião de elementos de $\mathscr{A}$ de medida finita) então $\nu = \mu$ em $\mathscr{M}$.

Questão 4 Nesta questão, construiremos a *medida de Lebesgue-Stieltjes* associada a uma função crescente contínua à direita[4] $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Considere a álgebra de conjuntos $\mathscr{A}$ formada pelas reuniões finitas de h-intervalos (i.e., intervalos da forma $(a,b]$ ou (a,∞), com $-\infty \le a < b < \infty$) e defina

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(F(b_j) - F(a_j)\right),$$

   e $\mu_0(\emptyset) = 0$. Mostre que μ_0 é uma pré-medida na álgebra $\mathscr{A}$.

[4]Isso significa que $\lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$.

2. Use o ítem (c) da questão anterior para concluir que existe uma única medida μ_F definida em $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ tal que $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$, para todos $a < b$.

3. Prove a recíproca do ítem anterior: se μ é uma medida de Borel em $\mathbb{R}$ (i.e., uma medida definida sobre $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$) então definindo
$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\mu((x,0]) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
temos uma função crescente e contínua à direita tal que $\mu_F = \mu$ em $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

Questão 5 Use a questão 3 para construir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, usando a abordagem proposta abaixo:

① Considere a álgebra gerada pelas uniões finitas de paralelepípedos e munida da pré-medida gerada por $\mu_0(I_1 \times \ldots \times I_n) = |I_1| \cdot \ldots \cdot |I_n|$.

② Verifique que a medida assim obtida é regular.

Questão 6 Um problema que intrigou matemáticos como Cauchy, Banach e Sierpinski é o seguinte: *Será que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo a equação funcional*
$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$
para todos $x, y \in \mathbb{R}$ é necessariamente da forma $f(x) = ax$, para algum $a \in \mathbb{R}$? A resposta para esta questão é **NÃO**.

1. Mostre que $f(rx) = rf(x)$ para todos $r \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$.

2. Mostre que qualquer f contínua satisfazendo a condição (1) é da forma $f(x) = ax$, para $a = f(1)$.

3. Este ítem pressupoe conhecimento de álgebra linear elementar e sua resolução não afeta o restante do exercício. Seja $\mathscr{B}$ uma base de $\mathbb{R}$ visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ e $\mathscr{B}^*$ sua base dual. Mostre que qualquer elemento $f \in \mathscr{B}^*$ satisfaz a equação (1) e *não é* da forma $f(x) = ax$ para nenhum $a \in \mathbb{R}$.

   Nos próximos ítens, vamos provar que se f satisfaz (1) e é *mensurável*, então f é contínua e, portanto, é da forma $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Para tanto, fixemos uma tal f.

4. Basta provar que f é contínua na origem. Dado um intervalo aberto J contendo a origem, mostre que existe um aberto U contendo a origem tal que $U - U \subset I$.

5. Seja $\{r_n\}_n$ uma enumeração de $\mathbb{Q}$. Mostre que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(r_n + U)$ e que algum dos conjuntos $W_n \doteq f^{-1}(r_n + U)$ tem medida positiva.

6. Mostre, usando o fato que f satisfaz (1), que $W_n - W_n \subset f^{-1}(U - U) \subset f^{-1}(I)$. Conclua, que para algum $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(I)$ contém um intervalo em torno da origem, ou seja, f é contínua na origem.

Questão 7 Seja $E \subset \mathbb{R}$ mensurável de medida positiva. Isso não significa que E seja *grande* do ponto de vista topológico, mas um fato surpreendente, demonstrado por Kolmogorov, é que o conjunto das diferenças
$$E - E \doteq \{x - y : x, y \in E\}$$
contém um *intervalo* centrado na origem. O objetivo desta questão é fornecer uma prova deste fato.

1. Dado $\delta \in (0,1)$, mostre que existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ tal que $m(E \cap I) > \delta |I|$.

2. Tome $\delta = \frac{3}{4}$ e aplique o ítem acima para obter um intervalo aberto I tal que $m(E \cap I) > \frac{3}{4}|I|$. Dado $x \in \left(-\frac{1}{2}|I|, \frac{1}{2}|I|\right)$, pondo $A = E \cap I$ e $B = (E \cap I) + x$, mostre que $A \cap B \neq \emptyset$. Em particular, $A - A$ contém o intervalo $\left(-\frac{1}{2}|I|, \frac{1}{2}|I|\right)$. Conclua que $E - E$ contém um intervalo aberto.

3. Conclua que existe um par de pontos distintos de E cuja diferença é racional.