UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM076 - Introdução à Teoria de Integração
Prof. José Carlos Eidam

SEGUNDA PROVA - 18/11/2013

Nome: ____

Assinatura: ____

ATENÇÃO!

1. Você pode utilizar *todos* os resultados provados em aula e deve justificar todas as suas respostas;
2. A sua nota dependerá mais da qualidade de suas resoluções do que da quantidade de questões que você resolver. Mas, mesmo assim, tente resolver o máximo que puder!
3. Em todas as questões, a menos de menção contrária, E denota um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, munido da medida de Lebesgue m.
4. A data final para entrega é **09/12/2013**.
5. As questões 1 e 4 são obrigatórias.
6. Boa prova!

Questão 1 Considere σ a medida de Lebesgue na esfera S^{n-1} conforme vimos em aula.[1]

1. Dados $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ inteiros não-negativos, chamamos $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ de *multi-índice*. Definimos
$$x^\alpha \doteq x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n},$$
para quaisquer multi-índice α e $x\in\mathbb{R}^n$. Mostre que
$$\int_{S^{n-1}} x^\alpha\, d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se algum } \alpha_j \text{ é ímpar} \\ \dfrac{2\Gamma(\beta_1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1+\ldots+\beta_n)}, & \text{se todos os } \beta_j\text{'s são pares e } \beta_j \doteq (\alpha_j+1)/2,\ 1\le j\le n \end{cases}$$
Uma boa dica é integrar $f(x)=e^{-|x|^2}x^\alpha$ em $\mathbb{R}^n$. Aqui, Γ denota a função gamma usual.

2. Mostre que $\sigma(S^{n-1})=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ e $m(B^n)=\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, onde B^n denota a bola aberta centrada na origem de raio 1 em $\mathbb{R}^n$.

Questão 2 (a) Sejam $f_n, g_n, f, g : E\to\overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis, $n\in\mathbb{N}$, tais que $f_n\to f$, $g_n\to g$ q.s., $|f_n|\le|g_n|$ e $\int_E f_n\,dm\to\int_E f\,dm$. Adapte a prova do teorema da convergência dominada para mostrar que $\int_E f_n\,dm\to\int_E f\,dm$.

(b) Mostre que se $f_n, f\in \mathrm{L}^1(E)$ e $f_n\to f$ q.s. então $\int_E|f_n-f|\,dm\to 0$ se e só se $\int_E|f_n|\,dm\to\int_E|f|\,dm$.

(c) Mostre que se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é monótona e $B\subset\mathbb{R}$ é boreliano então $f(B)$ é boreliano.

(d) Mostre que se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é mensurável então existe $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ boreliana tal que $[f\neq g]$ tem medida nula.

(e) Prove resultados de aproximação por funções contínuas e somas de funções características de cubos disjuntos semelhantes àqueles vistos em $\mathbb{R}$ para funções mensuráveis $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$.

(f) Dado $E\subset\mathbb{R}$ de medida nula, encontre $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monótona com derivada nula fora de E tal que $\overline{D^+f}(x)=+\infty$ para todo $x\in E$.

(g) Sejam $E\subset\mathbb{R}^n$ um cubo fechado e $f:E\to\mathbb{R}^m$ uma função contínua. Defina $N:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ pondo
$$N(y)=\#f^{-1}(y),$$
onde $f^{-1}(y)=\{x\in E : f(x)=y\}$. Mostre que N é uma função mensurável. Podemos enfraquecer alguma(s) hipótese(s) sobre f ou E de forma que o resultado continue verdadeiro?

(h) (Para quem sabe topologia) Seja $\mathscr{M}$ a família dos subconjuntos mensuráveis de E. Para $A,B\in\mathscr{M}$, defina
$$d(A,B)=\int_E|\chi_A-\chi_B|\,dm.$$
Mostre que d define uma pseudo-métrica em $\mathscr{M}$ (d dá uma noção de *convergência* de conjuntos mensuráveis). Mostre que $\mathscr{M}$ munido desta métrica é um espaço métrico completo. Interprete este resultado em termos da noção de convergência estabelecida.

---

[1] A medida σ é caracterizada pelo fato de termos $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx=\int_0^\infty\int_{S^{n-1}} f(rx')r^{n-1}\,d\sigma\,dr$ para toda $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Questão 3 Seja $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções mensuráveis. Considere as seguintes definições:

1. Dizemos que $\{f_n\}$ *converge em medida* para uma função mensurável $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ se
$$\lim_{n\to\infty} m\left([|f_n - f| \geq \varepsilon]\right) = 0$$
para qualquer $\varepsilon > 0$ dado. A sequência $\{f_n\}$ é dita *de Cauchy em medida* se
$$\lim_{m,n\to\infty} m\left([|f_n - f_m| \geq \varepsilon]\right) = 0$$
para qualquer $\varepsilon > 0$ dado.
2. Dizemos que $\{f_n\}$ converge para f em L^1 se $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| dm \to 0$.
3. Dizemos que $\{f_n\}$ *quase uniformemente* se dado $\varepsilon > 0$ existe $A \subset E$ mensurável $mA < \varepsilon$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em $E \setminus A$.
4. Dizemos que $f_n \to f$ quase sempre se $f_n(x) \to f(x)$ exceto para x em um subconjunto de medida nula de E.
5. Dizemos que $f_n \to f$ uniformemente se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todos $x \in E$ e $n \geq N$.

O objetivo desta questão é explorar as relações entre os diversos modos de convergência.

1. Mostre que o limite em medida de uma sequência é único, se existir.
2. Mostre que se $f_n \to f$ em L^1 então $f_n \to f$ em medida.
3. Seja $f_n = \chi_{I_n}$, onde $I_n = \left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^{k+1}}\right)$ para cada $n = 2^k + j$ com $0 \leq j < 2^k$. Mostre que $f_n \to 0$ em medida mas não converge q.s. para nenhuma função.
4. Mostre que se E tem medida finita e $f_n, f \in \mathrm{L}^1$ são tais que $f_n \to f$ uniformemente então $f_n \to f$ em L^1.
5. Se $f_n \to f$ quase uniformemente então $f_n \to f$ q.s.
6. (Teorema de Egoroff) Se $mE < \infty$ e $f_n \to f$ q.s. então $f_n \to f$ quase uniformemente.
7. (Teorema de Egoroff 2) Se existe $g \in \mathrm{L}^1(E)$ tal que $|f_n| \leq g$ e $f_n \to f$ q.s. então $f_n \to f$ quase uniformemente.
8. Mostre que se $\{f_n\}$ é de Cauchy em medida então $\{f_n\}$ admite uma subsequência que converge q.s. para uma função mensurável f. Além disso, $f_n \to f$ em medida.
9. Mostre que se $f_n \to f$ em L^1 então $\{f_n\}$ admite uma subsequência que converge para f q.s.
10. Mostre que se $f_n \to f$ quase uniformemente então $f_n \to f$ em medida.
11. Se $f_n \geq 0$ e $f_n \to f$ em medida então $\int_E f\, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$.

12. Se $|f_n| \leq g$ e $f_n \to f$ em medida então $\int_E f_n dm \to \int_E f dm$.

13. (Para quem sabe topologia) Suponhamos que $mE < \infty$ e definamos para $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ a métrica

$$d(f,g) = \int_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|} dm.$$

Mostre que d é uma pseudo-métrica e $d(f_n, f) \to 0$ se e só se $f_n \to f$ em medida.

Questão 4 Identifique a medida de Lebesgue nas seguintes superfícies $S \subset \mathbb{R}^3$:

1. S é o parabolóide $z = x^2 + y^2$;
2. S é a sela $z = y^2 - x^2$;
3. S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$;
4. S é a esfera de centro na origem e raio $r > 0$;
5. S é o elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $a, b, c > 0$.
6. S é o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Questão 5 Dizemos que uma família de cubos $\mathscr{Q}$ cobre um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ *no sentido de Vitali* se dados $x \in A$ e $\varepsilon > 0$ existe $Q \in \mathscr{Q}$ tal que $x \in Q$ e $\operatorname{diam} Q < \varepsilon$. (Aqui $\operatorname{diam} Q$ denota o *diâmetro de* Q, definido como $\operatorname{diam} Q \doteq \{|x-y| : x, y \in Q\}$.) O objetivo da questão é estender o lema de Vitali unidimensional visto em aula para o caso n-dimensional e aplicar o resultado para obter o teorema de diferenciação de Lebesgue.

1. (Vitali) Mostre que se $\mathscr{Q}$ é uma família de cubos fechados (ou bolas fechadas) que cobre A no sentido de Vitali então existe uma sequência $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ de cubos (bolas) disjuntos tais que
$$m^*\left(A \setminus \bigcup_{n\geq 1} Q_n\right) = 0.$$

2. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, dizemos que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ se $\int_K |f|\,dm < \infty$ para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Para uma tal f, definamos
$$A_r f(x) \doteq \frac{1}{m(B(x;r))} \int_{B(x;r)} f(y)\,dm(y),$$
onde $B(x;r)$ denota a bola aberta de centro x e raio $r > 0$. Mostre que $A_r f(x)$ é contínua em r e em x (conjuntamente).

3. O *operador maximal de Hardy-Littlewood* é definido como
$$Hf(x) \doteq \sup_{r>0} A_r|f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x;r))} \int_{B(x;r)} |f(y)|\,dm(y).$$
Mostre que Hf é mensurável e existe $C > 0$ (dependendo somente de n) tal que
$$m\big([Hf > \alpha]\big) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dm(x)$$
para toda $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e todo $\alpha > 0$.

4. Mostre que se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua de suporte compacto então $\lim_{r\to 0^+} A_r g = g$ q.s.

5. Mostre, usando aproximações, que $\lim_{r\to 0^+} A_r f = f$ q.s. para qualquer $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

6. Dada $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, o *conjunto de Lebesgue de f* é definido por
$$\mathrm{L}_f \doteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x;r))} \int_{B(x;r)} |f(y) - f(x)|\,dm(y) = 0\right\}.$$
Mostre que o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $\lim_{r\to 0^+} A_r f(x) = f(x)$ contém L_f. Verifique que se f é contínua em x então $x \in \mathrm{L}_f$.

7. Mostre que $m(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{L}_f) = 0$ e conclua o *Teorema de Diferenciação de Lebesgue*: Se $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ então
$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x;r))} \int_{B(x;r)} |f(y) - f(x)|\,dm(y) = 0,$$
para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular,
$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x;r))} \int_{B(x;r)} f(y)\,dm(y) = f(x)$$
para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

8. Mostre que o teorema de diferenciação de Lebesgue continua válido se trocarmos as bolas[2] $B(x;r)$ por cubos $Q(x;r)$ centrados em x de lado $r>0$. Mostre que tal resultado continua válido, em geral, se trocarmos a família $B(x;r)$ por uma família de conjuntos $E(x;r)$ tais que $E(x;r) \supset B(x;r)$ e $\inf_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} m(E(x;r))/m(B(x;r)) > 0$.

9. Uma medida de Borel μ em $\mathbb{R}^n$ é dita *absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue* se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mu E < \delta$ implica $mE < \varepsilon$. Mostre,[3] usando argumentos semelhantes àqueles utilizados em aula para mostrar a existência da derivada de uma função monótona, que para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe

$$\frac{d\mu}{dm}(x) \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{\mu(Q_k(x))}{m(Q_k(x))},$$

onde $\{Q_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma família de cubos de $\mathbb{R}^n$ que contém x cujos diâmetros tendem a zero. O limite, inclusive, independe da sequência utilizada. A função $\dfrac{d\mu}{dm}(x)$ é chamada de *derivada de Radon-Nikodym* de μ em relação a m e verifica a igualdade

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \int f(x)\frac{d\mu}{dm}(x)\,dm(x),$$

para qualquer f boreliana.

10. Para $n=1$, caso $\mu = \mu_F$ para F crescente, verifique que $\dfrac{d\mu_F}{dm}(x)$ é a derivada usual de F.

11. Mostre que se $E \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m(E\cap B(x;r))}{m(B(x;r))} = 1$$

para quase todo $x \in E$.

[2]Desconsidere o péssimo trocadilho...
[3]Isso é equivalente a dizer que $mE = 0$ implica $\mu E = 0$, mas não vem ao caso agora.