UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Prof. José Carlos Eidam
CM076 - Introdução a Teoria de Integração - 2013/2

1a. Lista de Exercícios

☆ Medidas em $\mathbb{R}$

1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\{I_\alpha\}_\alpha$ uma família qualquer de intervalos cuja união contém I. Mostre que $\sum_\alpha \ell(I_\alpha) \geq \ell(I)$.

2. Mostre que se $m^*(A) = 0$ então $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

3. Mostre que se $E \subset R$ tem medida exterior nula então E é mensurável.

4. Prove que m^* é invariante por translação.

5. Prove que a intersecção de uma família qualquer de σ-álgebras é uma σ-álgebra.

6. Dada uma família não-vazia qualquer $\mathscr{X}$ de subconjuntos de um conjunto, a σ-álgebra gerada por $\mathscr{X}$ é a intersecção de todas as σ-álgebras contendo $\mathscr{X}$ e é denotada por $\sigma(\mathscr{X})$. Prove que $\sigma(\mathscr{X})$ é uma σ-álgebra contendo $\mathscr{X}$ e dada qualquer σ-álgebra $\mathscr{A}$ contendo $\mathscr{X}$, tem-se que $\sigma(\mathscr{X}) \subset \mathscr{A}$.

7. A σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ é aquela gerada pela família de todos os intervalos de $\mathbb{R}$, a qual é denotada por $\mathscr{B}_\mathbb{R}$. Mostre que $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ é gerada pela família de intervalos da forma $(a,b]$, com $a < b$ e (a,∞), com $a \in \mathbb{R}$.

8. Uma família não-vazia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de um conjunto X é dita uma *álgebra* se for fechada por complementares, reuniões e intersecções finitas. Uma *pré-medida em* $\mathscr{A}$ é uma função $\mu_0 : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ tal que:

   (a) $\mu_0(\emptyset) = 0$;

   (b) Se $\{E_n\}_n$ é uma família de conjuntos disjuntos em $\mathscr{A}$ cuja reunião pertence a $\mathscr{A}$ então $\mu_0\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu_0(E_n)$.

   Neste problema, vamos mostrar como passar de uma pré-medida em uma álgebra para uma medida em uma σ-álgebra.

   (a) Mostre que a família $\mathscr{A}$ formada por todos os intervalos de $\mathbb{R}$ é uma álgebra e $\ell : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ é uma pré-medida em $\mathscr{A}$.

   (b) Se μ_0 é uma pré-medida em $\mathscr{A}$, defina

   $$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_n \mu_0(E_n) : E_n \in \mathscr{A},\ E \subset \bigcup_n E_n\right\}.$$

   Mostre que μ^* é uma *medida exterior* em X, i.e., $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ se $A \subset B$ e $\mu^*\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu^*(E_n)$.

(c) Um subconjunto $E \subset X$ é dito μ^* *-mensurável* (ou *mensurável segundo Carathéodory*) se satisfizer à condição milagrosa

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A),$$

para todo $A \subset X$. Mostre que a família $\mathscr{M}$ formada pelos conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra e a restrição de μ^* a $\mathscr{M}$ é uma medida.[1]

(d) No ítem anterior, mostre que se ν é uma medida em uma σ-álgebra contendo $\mathscr{M}$ tal que $\nu A = \mu A$ para todo $A \in \mathscr{A}$ então $\nu E = \mu E$ para todo $E \in \mathscr{M}$ tal que $\mu E < \infty$. Se μ é σ-finita (i.e., X é reunião de elementos de $\mathscr{A}$ de medida finita) então $\nu = \mu$ em $\mathscr{M}$.

9. Uma medida μ em uma σ-álgebra $\mathscr{A}$ é dita *completa* se todos os subconjuntos de um conjunto $A \in \mathscr{A}$ de medida nula pertencem a $\mathscr{A}$.

   (a) Mostre que a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ sobre a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis é completa.

   (b) Use o fato que todo subconjunto do conjunto de Cantor é mensurável para mostrar que a σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis tem a mesma cardinalidade que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$. Um argumento parecido também mostra que a σ-álgebra dos subconjuntos Lebesgue mensuráveis de um intervalo aberto I tem a mesma cardinalidade que $\mathscr{P}(I)$.

   (c) Use o próximo exercício para mostrar que a σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}$ (ou de um intervalo aberto) tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$. Conclua que todo intervalo aberto contém conjuntos mensuráveis não-borelianos.[2]

10. Se $\mathscr{X}$ é uma família qualquer de subconjuntos de $\mathbb{R}$, podemos considerar a família $\mathscr{X}_\delta$ (resp. $\mathscr{X}_\sigma$) formada por todas as intersecções (reuniões) enumeráveis de elementos de $\mathscr{X}$. Repetindo o processo, temos as famílias $\mathscr{X}_\delta$, $\mathscr{X}_{\delta\sigma}$, $\mathscr{X}_{\delta\sigma\delta}$, etc. Quando $\mathscr{X} = \mathscr{G}$ (classe dos abertos) ou $\mathscr{X} = \mathscr{F}$ (classe dos fechados), obtemos as classes dos $\mathscr{G}_\delta$'s, $\mathscr{F}_\sigma$'s, etc.

    (a) A menor σ-álgebra $\mathscr{B}$ que contém a família dos intervalos abertos é chamada de σ-álgebra de Borel e seus elementos são chamados de *borelianos*. Mostre que se $\mathscr{X} \subset \mathscr{B}$ então qualquer uma das famílias $\mathscr{X}_\delta$, $\mathscr{X}_\sigma$, $\mathscr{X}_{\delta\sigma}$, $\mathscr{X}_{\sigma\delta}$, $\mathscr{X}_{\delta\sigma\delta}$, $\mathscr{X}_{\sigma\delta\sigma}$, … está contida em $\mathscr{B}$.

    (b) Seja $\mathscr{B}_0 = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$. Assumindo definido $\mathscr{B}_n$ para um certo $n \geq 0$, definimos $\mathscr{B}_{n+1}$ como a classe formada pelos conjuntos que são reuniões ou intersecções enumeráveis de membros de $\mathscr{B}_n$. Mostre que $\mathscr{B}_0 \subsetneq \mathscr{B}_1 \subsetneq \mathscr{B}_2 \subsetneq \dots$. É verdade que $\mathscr{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$?

11. Neste exercício, o leitor é convidado a provar alguns fatos relacionando a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ com a topologia usual. A medida exterior usual em $\mathbb{R}$ será denotada, como de praxe, por m^* e sua restrição à σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis será denotada por m.

    (a) Dados $E \subset \mathbb{R}$ tal que $m^* E < \infty$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, mostre que existem um aberto $U \supset E$ e um fechado $F \subset E$ tais que

    $$m^* E - \varepsilon < m^* F \leq m^* U < m^* E + \varepsilon.$$

    Se E é Lebesgue mensurável então, dado $\varepsilon > 0$, existem U e F como acima tais que $m(U \setminus F) < \varepsilon$. Esta propriedade da medida de Lebesgue é chamada de *regularidade* e implica que, para todo conjunto Lebesgue mensurável E, tem-se

    $$mE = \inf_{U \text{ aberto}, \, U \supset E} mU = \sup_{F \text{ fechado}, \, F \subset E} mF.$$

[1] Este resultado é um dos muitos resultados chamados de *Teorema de Carathéodory*. Veja *Folland, G., Real analysis and its applications*, Section 1.4.

[2] Cuidado! Embora existam em maior *quantidade*, exibir um destes conjuntos é tarefa para anjos.

(b) Prove que para qualquer $E \subset \mathbb{R}$ mensurável (não necessariamente de medida finita), existem F fechado e U aberto tais que $m(U \setminus F) < \varepsilon$.

(c) Prove a recíproca dos ítens anteriores: se $E \subset \mathbb{R}$ é tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe um aberto $U \supset E$ (resp., um fechado $F \subset E$) tal que $m^*(U \setminus E) < \varepsilon$ (resp., $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$) então E é Lebesgue mensurável.

(d) Se $E \subset \mathbb{R}$ é mensurável então existem $G \in \mathscr{G}_\delta$ e $H \in \mathscr{F}_\sigma$ tais que $H \subset E \subset G$ tais que $m(G \setminus E) = m(E \setminus H) = m(G \setminus H) = 0$. Isso implica que existem $M, N \subset \mathbb{R}$ de medida nula (e, portanto, mensuráveis) tais que

$$E = H \dot\cup M \text{ e } E \dot\cup N = G.$$

Isso mostra que um conjunto Lebesgue mensurável é *quase* um boreliano.[3]

(e) Se E é Lebesgue mensurável, mostre que é possível obter F *compacto* satisfazendo as condições do ítem (1).

(f) A *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e B é definida por

$$A \triangle B \doteq (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Se E é Lebesgue mensurável e $\varepsilon > 0$ é dado, mostre que existem intervalos $I_1, \ldots, I_N$ tais que

$$m\left(E \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right)\right) < \varepsilon.$$

12. Construa um boreliano $E \subset [0,1]$ de interior vazio e medida 1.

13. Encontre subconjuntos $E, F \subset \mathbb{R}$ tais que $E \cup F = \mathbb{R}$, E tem medida nula e F é *magro*.[4]

14. Assumamos a existência de uma função $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ uma função satisfazendo:

(a) Se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e os $E_n's$ são dois-a-dois disjuntos, então $\mu E = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n$;

(b) $\mu(E + x) = \mu E$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(c) $\mu([0,1)) = 1$;

para todo $E \subset \mathbb{R}$. Vamos provar que uma tal μ não pode existir.

(a) Considere a relação de equivalência em $[0,1)$ dada por $x \sim y$ se e só se $x - y \in \mathbb{Q}$. Construa, via axioma da escolha, um subconjunto $E \subset [0,1)$ que contenha exatamente um elemento de cada classe de equivalência de $\sim$.

(b) Mostre que os conjuntos $E_r \doteq (E \oplus r) \cap [0,1)$ (onde $\oplus$ denota a soma módulo 1) são disjuntos e $[0,1) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q},\, r \in [0,1]} E_r$.

(c) Mostre que $\mu E_r = \mu E$ e conclua que $1 = \sum_r \mu E_r = \sum_r \mu E$, logo, $\mu E = 0 = \mu([0,1))$, uma contradição.

15. Neste exercício, construiremos a *medida de Lebesgue-Stieltjes* associada a uma função crescente contínua à direita[5] $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

[3] O exercício (9) dá uma idéia de quão complicado pode ser um conjunto Lebesgue mensurável em geral.

[4] Isto significa, por definição, que F está contido em uma reunião enumerável de fechados com interior vazio.

[5] Isso significa que $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$.

(a) Considere a álgebra de conjuntos $\mathscr{A}$ formada pelas reuniões finitas de h-intervalos (i.e., intervalos da forma $(a,b]$ ou (a,∞), com $-\infty \le a < b < \infty$) e defina

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(F(b_j)-F(a_j)\right),$$

e $\mu_0(\emptyset)=0$. Mostre que μ_0 é uma pré-medida na álgebra $\mathscr{A}$.

(b) Use o ítem (c) do exercício (9) para concluir que existe uma única medida μ_F definida em $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ tal que $\mu_F((a,b]) = F(b)-F(a)$, para todos $a<b$.

(c) Prove a recíproca do ítem anterior: se μ é uma medida de Borel em $\mathbb{R}$ (i.e., uma medida definida sobre $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$) então definindo

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -\mu((x,0]) & \text{se } x<0 \end{cases}$$

temos uma função crescente e contínua à direita tal que $\mu_F = \mu$ em $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

✰ Funções mensuráveis

16. Mostre que se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é mensurável e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua então $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são mensuráveis.

17. Mostre que se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é mensurável e $B\subset\mathbb{R}$ é boreliano então $f^{-1}(B)$ é boreliano.

18. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mensurável tal que o conjunto $\{x\in\mathbb{R} : |f(x)|=\infty\}$ tem medida nula e $\varepsilon>0$. Encontre funções $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g simples e h contínua tais que $|f-g|<\varepsilon$ e $|f-h|<\varepsilon$ exceto em um conjunto de medida $<\varepsilon$. Se $|f|\le M$ em $\mathbb{R}$, podemos tomar g,h tais que $|g|\le M$ e $|h|\le M$ em $\mathbb{R}$. Veja o exercício 5.16 do livro do Royden.

19. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mensurável limitada. Dado $\varepsilon>0$, mostre que existe uma função escada[6] $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $|f-\varphi|\le\varepsilon$.

20. Mostre que se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é mensurável e $\varepsilon>0$ então existe uma função *contínua* $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $\{x\in[a,b] : \varphi(x)\ne f(x)\}$ tem medida $<\varepsilon$.

21. Mostre que se $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ é mensurável, então existe uma sequência de funções simples $0\le\varphi_1\le\varphi_2\le\ldots\varphi_n\le\ldots\le f$ que converge pontualmente para f, tal que a convergência é uniforme em subconjuntos onde f é limitada.

22. Mostre que se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é mensurável, então existe uma sequência de funções simples $\{\varphi_n\}_n$ tal que $0\le|\varphi_1|\le\varphi_2\le\ldots\varphi_n\le\ldots\le f$ e $\{\varphi_n\}_n$ converge pontualmente para f. A convergência é uniforme em subconjuntos onde f é limitada.

23. Sejam $A\subset\mathbb{R}$ denso e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(a,\infty)$ é mensurável para todo $a\in A$. Mostre que f é mensurável.

24. Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita *boreliana* se $f^{-1}(a,\infty)$ é boreliano, para todo $a\in\mathbb{R}$.

    (a) Mostre que f é (Lebesgue) mensurável.
    (b) Mostre que $f^{-1}(B)$ é boreliano para todo $B\subset\mathbb{R}$ boreliano.
    (c) Mostre que a composta de duas funções borelianas também é boreliana.
    (d) Mostre que se f é boreliana e g é Lebesgue mensurável então $f\circ g$ é Lebesgue mensurável.

[6] Uma *função escada* é uma função da forma $\varphi=\sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{I_j}$, onde cada $I_1,\ldots,I_n$ são intervalos de $\mathbb{R}$.