UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Turma A - Matemática Diurno
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

EXAME FINAL - 15/07/2014

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 16h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. **(1 ponto)** Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ que torna f contínua em $(0,0)$.

$$\underbrace{xy}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{sen\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}_{\downarrow\, 0} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

2. **(2 pontos)** Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

$$f(x,0) = f(0,y) = 0 \quad \therefore \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

$$\therefore \frac{f(x,y) - f_x(0,0)\cdot x - f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \overset{\nearrow 0}{x} \cdot \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{\frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \overset{\nearrow 0}{sen\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

$$\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

$\therefore$ f É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$.

Questão 2 Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f(2,-1) = 3$, $f_x(2,-1) = 1$ e $f_y(2,-1) = -1$.

1. **(1 ponto)** Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,-1,3)$.

$$z - 3 = 1\cdot(x-2) - 1(y+1)$$

$$\boxed{x - y - z = 0}$$

2. **(2 pontos)** Considere

$$g(x,y) = (x+3y^3)\, f\left(\cos x + y^2, \ln(1+x^2) - e^{xy}\right).$$

Determine o valor de a para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(0,1,g(0,1))$ seja paralelo à reta $(x,y,z) = (1977,1978,1979) + \lambda(2a,-1,a+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$g(0,1) = 3\cdot f(2,-1) = 9$$

$$g_x(x,y) = 1\cdot f(\cos x + y^2, \ln(1+x^2) - e^{xy}) + (x+3y^3)\cdot$$

$$\cdot\left\{ f_x(\cos x + y^2, \ln(1+x^2) - e^{xy})\cdot(-\operatorname{sen} x) + f_y(\cos x + y^2, \ln(1+x^2) - e^{xy})\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2} - ye^{xy}\right)\right\} \Rightarrow \boxed{g_x(0,1) = 6}$$

$$g_y(x,y) = 9y^2 f(\cos x + y^2, \ln(1+x^2) - e^{xy}) + (x+3y^3)\cdot\left\{f_x(\cdot,\cdot)\cdot(2y) + \right.$$

$$\left. + f_y(\cdot,\cdot)\cdot(-xe^{xy})\right\} \therefore \boxed{g_y(0,1) = 33}$$

VETOR NORMAL $\vec{n}$ AO GRÁFICO DE g EM $(0,1,9)$: $(g_x(0,1), g_y(0,1), -1) =$

$$\vec{n} = (6, 33, -1).$$

$$\therefore \quad \vec{n} \perp (2a, -1, a+1) \Rightarrow \quad 6\cdot 2a - 33 - (a+1) = 0$$

$$11a = 34$$

$$\boxed{a = 34/11}$$

Questão 3 **(2 pontos)** Considere a equação

$$x^4y + 2x^3y^2 + 3y^3 = 6$$

nas variáveis reais x e y. Mostre que toda solução desta equação suficientemente próxima da solução $(1,1)$, pode ser escrita na forma $(x, y(x))$ com $y = y(x)$ de classe C^1, $y(1) = 1$. Determine a reta tangente ao gráfico da função $y = y(x)$ no ponto $(1,1)$.

$f(x,y) = x^4y + 2x^3y^2 + 3y^3$, $f_x(x,y) = 4x^3y + 6x^2y^2$

$f_y(x,y) = x^4 + 4x^3y + 9y^2$ $\therefore$ $f_y(1,1) = 14 \neq 0$ $\therefore$ $y = y(x)$ EM

UMA VIZINHANÇA DE $(1,1)$.

TEMOS $y'(x) = -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \Rightarrow y'(1) = -\dfrac{10}{14} = -\dfrac{5}{7}$.

$\therefore$ A RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE $y = y(x)$ EM $(1,1)$ É

$y - y(1) = y'(1)(x-1) \Rightarrow \boxed{y - 1 = -\frac{5}{7}(x-1)}$

Questão 4 (2 pontos) Considere $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy^3$. Determine os valores máximo e mínimo de f em D.

NO INTERIOR

$f_x = y^3 = 0$
$f_y = 3xy^2 = 0$ $\Rightarrow$ OS PONTOS CRÍTICOS SÃO DA FORMA $(x,0)$. COMO $f(x,0) = 0$ E f ASSUME VALORES POSITIVOS E NEGATIVOS, ESTES PONTOS NÃO SÃO EXTREMANTES DE f EM D.

NA BORDA $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$; PODEMOS SUPOR $x \neq 0$ E $y \neq 0$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3 = 2\lambda x \\ 3xy^2 = 2\lambda y \end{cases} \Rightarrow \frac{y^3}{2x} = \frac{3xy^2}{2y}$$

$\frac{y^3}{x} = 3xy \Rightarrow y^2 = 3x^2$; COMO $x^2 + y^2 = 1$ ENTÃO

$4x^2 = 1 \therefore x = \pm 1/2$. OBTEMOS OS PONTOS

$P_1 = \left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ E

$P_4 = \left(-1/2, -\sqrt{3}/2\right)$.

$$f(P_1) = f(P_4) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$ VALOR MÁXIMO

$$f(P_2) = f(P_3) = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$$ VALOR MÍNIMO.