UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Matemática Diurno
Prof. Zeca Eidam

Lista 1

✰ Curvas

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(1) $\gamma(t) = (1, t)$

(2) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \text{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(3) $\gamma(t) = (\text{sen}\, t, \text{sen}^2 t)$

(4) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\text{sen}\, t)$

(5) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$

(6) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \,\text{sen}\, t)$, $t \geq 0$

(7) $\gamma(t) = (\sec t, \tan t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

(8) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2\text{sen}\, t)$

(9) $\gamma(t) = (\ln t, \sqrt{t})$, $t \geq 1$

(10) $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$

(11) $\gamma(t) = (1 + \cos t, 2\cos t - 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(12) $\gamma(t) = (1 - t^2, 2t^3 + 1)$, $t \in \mathbb{R}$

(13) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$

(14) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$

(15) $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$

(16) $\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2, t^3 - 12t)$

(17) $\gamma(t) = (\ln(1 + t^2), t^3 - 3t)$

(18) $\gamma(t) = (t(t^4 - 1), t^4 - 1)$

(19) $\gamma(t) = (t^2 - 2t, t^3 - 3t + 1)$

(20) $\gamma(t) = (\ln t, \sqrt[3]{t})$, $t > 0$

(21) $\gamma(t) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3}\right)$

(22) $\gamma(t) = \left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)$

(23) $\gamma(t) = (t^3 - 12t, t^2 - 2t)$

(24) $\gamma(t) = (2t - 4t^3, 3t^4 - t^2)$

(25) $\gamma(t) = (\text{sen}\, 2t, \cos t)$

(26) $\gamma(t) = (2\text{cotg}\, t, 2\text{sen}^2 t)$

(27) $\gamma(t) = (2\text{sen}^2 t, 2\text{sen}^2 \tan t)$, $|t| < \pi/2$

(28) $\gamma(t) = (e^t, t^2)$

(29) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \text{sen}^3 t)$

(30) $\gamma(t) = (t^{31} + \cos t, 2014 - t^{31} - \cos t)$

2. Encontre equações paramétricas para as curvas definidas pelas equações abaixo:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$

(2) $3(x - 1)^2 + 5(y + 2)^2 = 15$

(3) $y^2 - 4y + 3 - x = 0$

(4) $x^3 + y^3 = 6xy$ (Folium de Descartes)

(5) $y^2 = x^3$

(6) $y^2 = x^3 + x^2$

(7) $(x^2 + y^2)^2 = xy$ (Lemniscata de Bernoulli)

(8) $x^8 + y^8 = x + y$

(9) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

3. Esboce as seguintes curvas dadas em coordenadas polares:

(1) $r = 1$

(2) $\theta = \pi/3$

(3) $r = \cos\theta$

(4) $r = \cos 2\theta$

(5) $r = 1 + \text{sen}\theta$

(6) $r = \cos 3\theta$

(7) $r = 2|\text{sen}\theta|$

(8) $r = \frac{1}{\cos\theta}$

(9) $r = \theta$

(10) $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$

(11) $r = \ln\theta$

(12) $r = \text{cossec}\,\theta$

(13) $r = \sec\theta$

(14) $r = 1 + 2\text{sen}\theta$

(15) $r = 1 + \frac{1}{2}\text{sen}\theta$

(16) $r^2\theta = 1$

4. Encontre equações polares e faça um esboço das as curvas dadas abaixo em equações cartesianas:

(1) $x^2+y^2=a^2$, $a>0$

(2) $2x+3y=1$

(3) $x^2-y^2=1$

(4) $x^2+2y^2=1$

(5) $x^2+y^2=e^{2y/x}$

(6) $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

(7) $y-x\tan((x^2+y^2)^{-1/2})=0$

(8) $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$

(9) $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$

(10) $xy=4$

(11) $x^2+y^2=20x$

(12) $x^2+x=-y^2$

(13) $y=x^3$

(14) $y^2=x^3$

(15) $(x^2+y^2-2x)^2=4(x^2+y^2)$ (Cardióide)

(16) $y^{2013}=x^{2014}$

(17) $4x^2=81(x^2+y^2)$ (Curva de Eudoxus)

(18) $y^2(2-x)=x^3$ (Cissóide de Diocles)

(19) $(x-1)^2(x^2+y^2)=x^2$ (Conchóide de Nicomedes)

(20) $(x+1)(x^2+y^2)=4x^2$ (Pérola de Sluze)

(21) $4(x^2+y^2-x)=27(x^2+y^2)^2$ (Curva de Cayley)

(22) $x^4=x^2-y^2$ (Figura Oito)

5. Encontre pelo menos dois conjuntos distintos de equações paramétricas para representar cada uma das curvas do exercício anterior.

6. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

   (a) $x=t^3-2t,\ \ y=t^2-t$

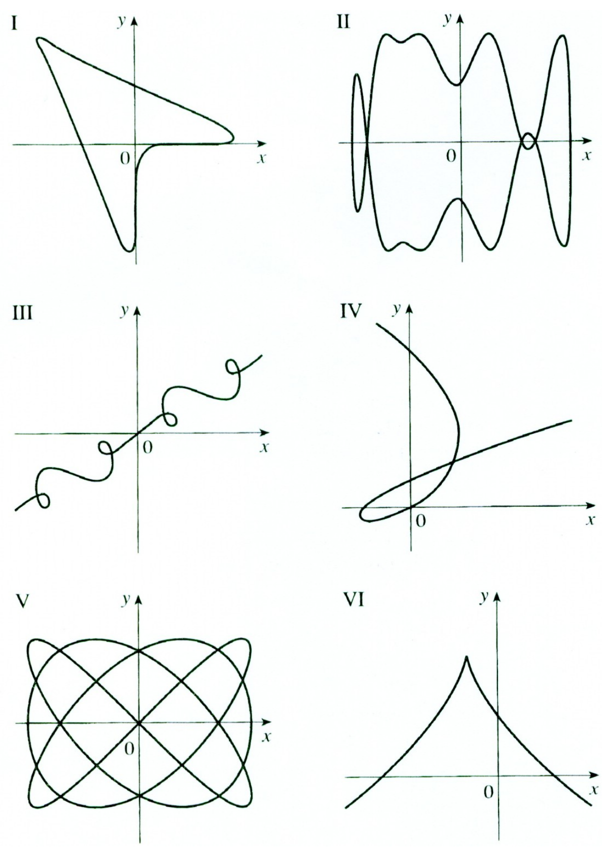
   (b) $x=t^3-1,\ \ y=2-t^2$

   (c) $x=\operatorname{sen}(3t),\ \ y=\operatorname{sen}(4t)$

   (d) $x=t+\operatorname{sen}(2t),\ \ y=t+\operatorname{sen}(3t)$

   (e) $x=\operatorname{sen}(t+\operatorname{sen}t),\ \ y=\cos(t+\cos t)$

   (f) $x=\cos t,\ \ y=\operatorname{sen}(t+\operatorname{sen}(5t))$



7. Considere $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função f é derivável em $x=0$? Determine uma curva $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

8. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma: I\to\mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se o traço de γ está contido em uma circunferência então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t\in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

9. Calcule o comprimento das curvas abaixo:

   ① $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)$, $t \in [-4, 4]$;

   ② $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \text{sen}^2 t)$, $t \in [0, \pi]$;

   ③ $\gamma_3(t) = (\cos t + t \,\text{sen}\, t, \text{sen}\, t - t \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

10. Encontre o comprimento de um arco da ciclóide $x = r(\theta - \text{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ (Dica: Use a identidade $1 - \cos\theta = 2\text{sen}^2(\theta/2)$).

11. Mostre que o comprimento da elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\text{sen}\theta$, $a > b > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ é

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \text{sen}^2\theta}\, d\theta,$$

    onde $\varepsilon = c/a$ é a excentricidade da elipse e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

12. Esboce a astróide $x = a\cos^3\theta$, $y = b\text{sen}^3\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $a > 0$, e calcule seu comprimento.

13. Calcule a área limitada por cada uma das curvas abaixo:

    (1) $r = \cos 2\theta$ (2) $r = 3\cos\theta$ (3) $r = 3(1 + \cos\theta)$ (4) $r^2 = 4\cos(2\theta)$

    (5) $r = 2 - \text{sen}(2\theta)$ (6) $r = 1 + 2\text{sen}\theta$ (7) $r = 2\cos\theta - \sec\theta$ (8) $r = \theta^2$

14. Encontre a área da região delimitada pelas curvas abaixo:

    (1) $r = \sqrt{3}\cos\theta$, $r = \text{sen}\theta$ (2) $r = 2\cos\theta$, $r = 1$ (3) $r = 1 + \cos\theta$, $r = 1 - \cos\theta$

    (4) $r = \text{sen}2\theta$, $r = \cos 2\theta$ (5) $r = 3\cos\theta$, $r = 2 - \cos\theta$ (6) $r = 3\text{sen}\theta$, $r = 2\text{sen}\theta$

    (7) $r^2 = \text{sen}2\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$ (8) $r = 4\text{sen}\theta$, $r = 2$ (9) $r = \text{sen}\theta$, $r = \text{sen}2\theta$

15. Encontre as equações das retas tangentes à curva paramétrica $x(t) = 3t^2 + 1$, $y(t) = 2t^3 + 1$ que passam pelo ponto $(4, 3)$.

16. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular *parametrizada pelo comprimento de arco s*. O *vetor normal* a γ no ponto $\gamma(t)$ é definido por $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, $a < s < b$.

    ① Mostre que os vetores $\gamma'(s)$ e $\gamma''(s) = (x''(s), y''(s))$ são perpendiculares para qualquer $s \in (a, b)$.

    ② Mostre que existe uma função $\kappa : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\gamma''(s) = \kappa(s) n(s)$, para $a < s < b$. O valor $\kappa(s)$ é chamado *curvatura* de γ em $\gamma(s)$. Mostre que $\kappa = x'y'' - x''y'$, onde $'$ denota a derivada em relação a s.

    ③ Considere o ângulo $\theta(s)$ formado pelo eixo x e pela reta tangente a γ em $\gamma(s)$, i.e., $\tan\theta(s) = y'(s)/x'(s)$. Mostre que $\kappa(s) = \theta'(s)$ para cada $s \in (a, b)$ e interprete geometricamente o que significa o sinal da curvatura de γ.

    ④ Seja $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular qualquer com $\alpha(t) = (p(t), q(t))$, $a < t < b$, s o parâmetro de comprimento de arco e $\beta(s) = \alpha(t(s))$, a reparametrização de α por comprimento de arco. Como β é parametrizada por comprimento de arco, a curvatura κ de β é bem-definida. Mostre que

$$\kappa = \frac{p'q'' - p''q'}{(p'^2 + q'^2)^{3/2}}$$

    O valor desta função em $s = s(t)$ é chamado de *curvatura* de α em $\alpha(t)$.

⑤ Mantendo a notação do ítem anterior, admitindo que α seja o gráfico de uma função $y = f(t)$, mostre que a curvatura é dada por $\kappa = \dfrac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}$.

⑥ Calcule a curvatura da *espiral logarítmica* $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

✩ Curvas notáveis

17. A *clotóide* (também chamada de *espiral de Euler* e *espiral de Cornu*) é uma curva γ com a seguinte propriedade: para cada ponto $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ da curva, o ângulo $\varphi(s) = \arctan(y'(s)/x'(s))$ formado pelo vetor tangente em $\gamma(s)$ e o eixo x tem crescimento linear, i.e.,

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2a^2 s.$$

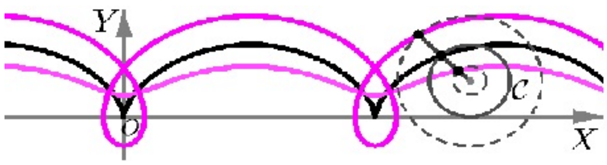
O valor a é uma constante positiva e o termo 2 foi inserido para deixar a resposta final mais comportada.

(a) Assumindo que $\gamma(0) = (0,0)$ e que a tangente em $\gamma(0)$ seja horizontal, mostre que $\varphi(s) = (as)^2$.

(b) Mostre que $x(s) = \int_0^s \cos((au)^2)\,du$ e $y(s) = \int_0^s \operatorname{sen}((au)^2)\,du$. Estas integrais são chamadas de *integrais de Fresnel* e são muito importantes em aplicações físicas, por exemplo, em teoria de difração.[1] A clotóide é uma curva especialmente utilizada em construções de estradas e *loops* tipo montanha-russa por limitar a força da gravidade. A curvatura ao longo da clotóide cresce linearmente com o comprimento de arco.

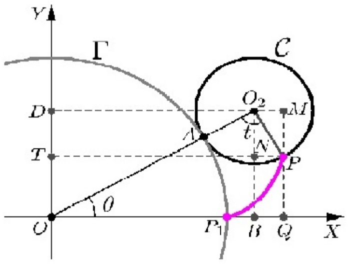
(c) Esboce o traço da clotóide.

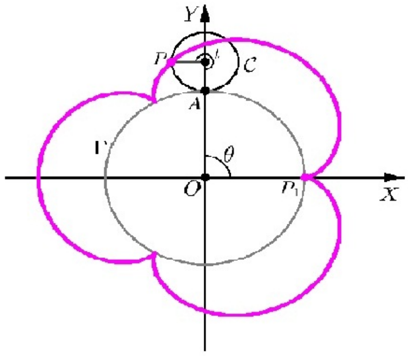
18. **(Trocóide)** Consideremos a circunferência C de centro $(0,r)$ e raio $r > 0$, a semi-reta $s = \{(x,y) : y \geq 0\}$ e um ponto $P = (0,R)$, $R > 0$, nessa semi-reta. Uma *trocóide* é o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola sobre o eixo x sem deslizar. Note que a ciclóide é um caso particular de trocóide quando $P \in C$. Quando P é exterior a C, a trocóide é chamada de *ciclóide longa*; quando P é interior a C, a trocóide é chamada de *ciclóide curta*. Encontre equações paramétricas que descrevam a trocóide.

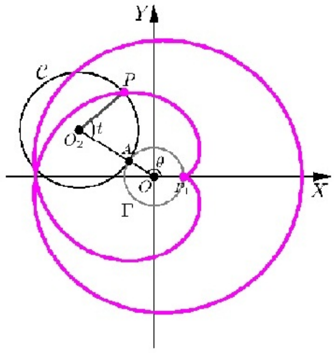


19. **(Epiciclóide)** Consideremos dois círculos Γ e C de raios $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os quais se tocam exteriormente apenas em um ponto P. Admitamos também que Γ seja centrado na origem e C tenha centro no ponto $(R+r, 0)$. Denominamos *epiciclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola (sem deslizar) sobre Γ. A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram os casos $r < R$ e $r > R$, respectivamente.

[1] Pelo amor de Deus, **NÃO** tente resolver estas integrais!







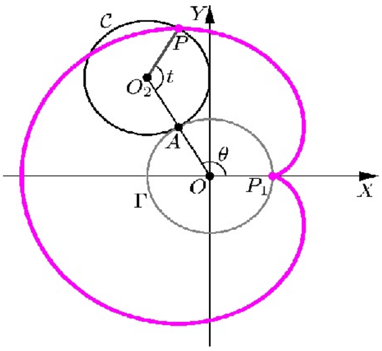
① Sejam (x, y) as coordenadas do ponto P na primeira figura. Mostre que $x = OB - QB$, $y = OD - DT$, $OB = (R + r)\cos\theta$ e $OD = (R + r)\text{sen}\,\theta$.

② Mostre que $QB = r\cos(\theta + t)$ e $DT = r\,\text{sen}\,(\theta + t)$.

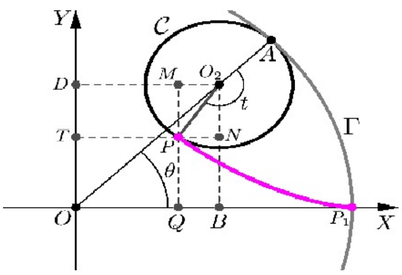
③ Mostre que $t = R\theta/r$ e conclua que as equações paramétricas da epiciclóide são

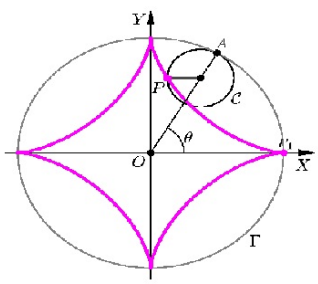
$$x = (R + r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right) \text{ e } y = (R + r)\text{sen}\,\theta - r\,\text{sen}\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right).$$

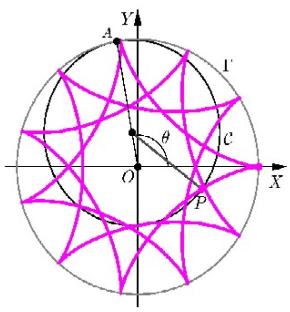
Quando $R = r$, a curva obtida é chamada de *cardióide*.



20. **(Hipociclóide)** Consideremos dois círculos Γ e C de raios $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os quais se tocam *interiormente* apenas em um ponto P. Admitamos também que Γ seja centrado na origem e C tenha centro no ponto $(R + r, 0)$. Denominamos *hipociclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola (sem deslizar) sobre Γ. A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram hipociclóides.







Usando raciocínios semelhantes àqueles utilizados no problema anterior, mostre que a hipociclóide tem equações paramétricas

$$x = (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right) \text{ e } y = (R-r)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right).$$

A hipociclóide obtida com $r = R/4$ é chamada de *astróide*.

21. O *fólium de Descartes* é a curva γ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3}$ e $y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, com $t \neq -1$, onde $a > 0$ é fixado.

   ① Mostre que γ satisfaz a equação cartesiana $x^3 + y^3 = 3axy$. Em particular, γ é simétrica em relação à reta $y = x$.

   ② Mostre que a reta $x + y + a = 0$ é uma assíntota de γ.

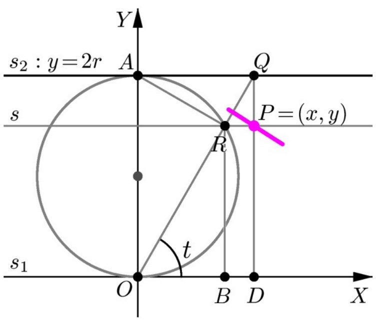
   ③ Faça um esboço de γ .

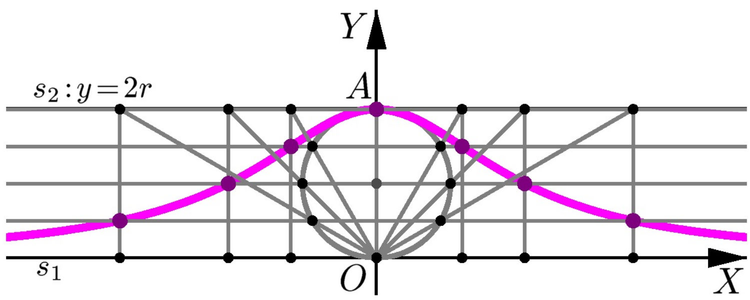
22. A *lemniscata de Bernoulli* é a curva γ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$ e $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$.

   ① Mostre que γ satisfaz a equação cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = xy$. Em particular, γ é simétrica em relação à reta $y = x$.

   ② Faça um esboço de γ .

23. **(Curva de Agnesi)** Seja C um círculo de raio $r > 0$ tangente ao eixo x e à reta $y = 2r$, onde $r > 0$ é fixado, conforme mostrado na primeira figura abaixo. Da origem, traçamos uma semi-reta em direção à reta s_2 e denotemos por R e Q os pontos de intersecção desta semi-reta com C e s_2, respectivamente. O segmento QD é perpendicular a s_1 e a reta s é paralela a s_1. Consideremos também a reta s paralela ao eixo x passando por R e P o ponto de interseção da reta s com o segmento QD. Os pontos $P = (x, y)$ obtidos traçando todas as semi-retas que partem de O e intersectam C, descrevem a curva denominada *curva de Agnesi*, descrita na segunda figura abaixo.



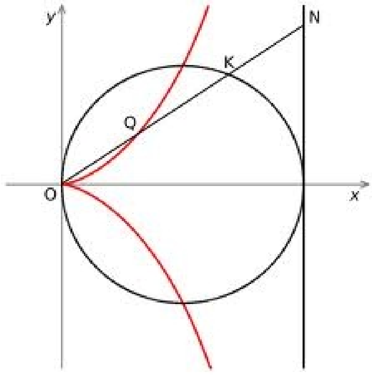


   ① Mostre que $x = OQ\cos t$ e $y = OR\operatorname{sen} t$.

   ② Mostre que $OQ = 2r/\operatorname{sen} t$ e $OR = 2r\operatorname{sen} t$.

   ③ Obtenha equações paramétricas para a curva de Agnesi.

24. **(Cissóide)** Seja C o círculo de centro $(r,0)$ e raio $r>0$ e considere a reta $x=2r$, conforme mostra a figura abaixo. Traçando uma semi-reta s qualquer partindo da origem, sejam K e N os seus pontos de intersecção com C e s, respectivamente. O ponto Q sobre s tem a propriedade que $OQ=KN$. Os pontos $P=(x,y)$ obtidos quando traçamos todas as semi-retas que partem da origem e intersectam s formam uma curva γ chamada de *cissóide de Diocles.* O parâmetro que usaremos para parametrizar esta curva é o ângulo θ entre o segmento ON e o eixo x.



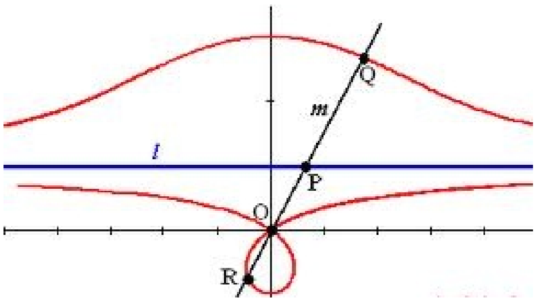
① Mostre que $OK=2r\cos\theta$ e $ON=\dfrac{2r}{\cos\theta}$. Conclua que $KN=2r\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$.

② Obtenha equações paramétricas para γ.

③ Mostre que a equação de γ em coordenadas polares é $r=2r\operatorname{sen}\theta\tan\theta$.

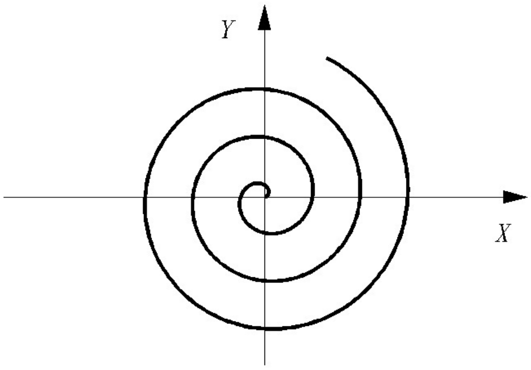
④ Mostre que γ tem equação cartesiana $x^3+(x-2r)y^2=0$.

25. Sejam $a,b>0$ r a reta horizontal $y=a$. Tracemos uma reta s partindo da origem em direção à r e chamemos de P o ponto de intersecção de s e r. Os pontos Q e R tais que as medidas dos segmentos PQ e PR são constantes iguais a b formam uma curva chamada de *conchóide de Nicomedes.*



Usando o ângulo θ entre a reta s e o eixo x como parâmetro, mostre que γ tem equações paramétricas $x=a\operatorname{cotg}\theta+b\cos\theta$ e $y=a+b\operatorname{sen}\theta$, $0<|\theta|<\pi$.

26. A *espiral de Arquimedes* é a curva γ descrita em coordenadas polares pela equação $r=a\theta$, $\theta\geq 0$, onde $a>0$ é fixo.



① Encontre equações paramétricas para as espirais de Arquimedes.

② Mostre que γ satisfaz a equação $x\tan(\sqrt{x^2+y^2}/a) = y$.

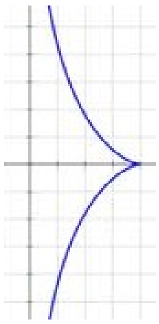
③ Mostre que a distância entre dois pontos de intersecção consecutivos de γ com o eixo x é constante igual a $2a\pi$.

27. **(Tractriz)** Seja γ uma curva diferenciável contida no primeiro quadrante, P um ponto de γ, r a reta tangente à γ em P. Admitindo que r não seja vertical, seja Q o ponto de intersecção entre r e o eixo y. Suponha que o segmento PQ tenha comprimento constante igual a $a > 0$.

① Pondo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, mostre que γ satisfaz a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

② Resolva esta equação fazendo a substituição trigonométrica $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$ e usando a relação trigonométrica $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{2\tan(\theta/2)}{\sec^2(\theta/2)}$.

③ Mostre que $x(\theta) = a\cos\theta$, $y(\theta) = a\cos\theta + a\ln(\tan(\theta/2))$, $|\theta| < \pi/2$, é uma parametrização da curva γ. Esta curva é chamada de *tractriz* e seu traço é a figura abaixo.



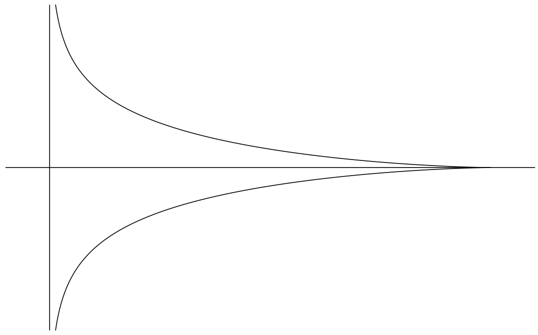
28. **(Tractriz - Ponto de vista dinâmico)** A *tractriz* é a curva do plano xy que tem a propriedade que o segmento de reta tangente delimitado pelo ponto de tangência e o eixo y tem comprimento constante. Esta curva admite a seguinte descrição mecânica: admita que uma partícula P com certa massa é arrastada a partir de sua posição inicial sobre o eixo x ao longo de um plano horizontal áspero por meio de uma corda PQ de comprimento $a > 0$ mantida tensionada, de forma que a extremidade Q esteja sobre o eixo y. Esta curva foi estudada primeiramente por James Bernoulli em 1691, tem aplicações mecânicas na construção de eixos e acústicas na construção de alto-falantes.[2]

[2] A superfície obtida por rotação desta curva em torno do eixo y é a superfície chamada de *pseudo-esfera*. Esta superfície tem curvatura gaussiana constante negativa e é um modelo para a geometria de Lobatchevski.

(a) Nestas condições, mostre que o menor ângulo formado pelo segmento PQ e o eixo x tem tangente igual a $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. Conclua que, se o gráfico de $y = y(x)$ descreve a trajetória da particula no primeiro quadrante, então

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

(b) Determine a solução para esta última equação. Certifique-se de que os gráficos de y e $-y$ descrevem a figura abaixo.



29. **(A braquistócrona)** Em 1696, Johann Bernoulli propõe o seguinte problema: determinar a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo. Note que o problema não é determinar o caminho mais curto e sim a trajetória percorrida em menor tempo. A curva determinada pela trajetória da partícula é denominada *braquistócrona*, palavra derivada do grego *brakhisto* (o mais curto) e *chronos* (tempo). O problema foi resolvido em 1697 por Jacob Bernoulli, Leibniz, L'Hospital e Newton e tem grande importância na história da matemática.

(a) A velocidade da partícula pode ser obtida igualando-se a energia cinética e a energia potencial, i.e., $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$, onde m é a massa da partícula e g a constante gravitacional. Conclua que $v = \sqrt{2gy}$.

(b) O *Princípio de Fermat* diz que a trajetória que minimiza tempo entre dois pontos é a da luz, logo, se θ é o ângulo entre a vertical e a trajetória, então $\frac{\operatorname{sen}\theta}{v} = \frac{1}{v}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{v_m}$, com v_m constante. Isso implica que a trajetória mínima começa sempre com tangente vertical. Admitindo que a partícula parta da origem e atinja seu ponto mínimo em um ponto de ordenada $-D$, com $D > 0$, temos $v_m = \sqrt{2gD}$.

(c) Usando o fato que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, conclua que $v_m^2 dx^2 = v^2 ds^2 = v^2(dx^2 + dy^2)$ e $dx = \frac{v\,dy}{v_m^2 - v^2}$. Mostre que

$$dx = \sqrt{\frac{y}{D-y}}\,dy,$$

e conclua que $y' = \sqrt{\frac{D-y}{y}}$. A equação acima implica que $x = \int \sqrt{\frac{y}{D-y}}\,dy$.

(d) Faça a mudança de variável $y = \dfrac{D}{2}(1-\cos\theta) = D\text{sen}^2(\theta/2)$, determine uma parametrização para o gráfico da solução da equação obtida no ítem anterior e esboce esta solução. A curva solução do problema também é chamada de *ciclóide*.

30. **(A tautócrona)** Em 1659, o físico holandês Christian Huygens propõe o seguinte problema: determinar uma curva plana na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar sem fricção em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida. Este problema é chamado de *problema da tautócrona* ou *isócrona*, do do grego *tautos* (mesmo), *chronos* (tempo).

    (a) Como no primeiro ítem do exercício anterior, se $s = s(t)$ é o comprimento de arco da curva, então sua altura y deve ser proporcional à velocidade da partícula, i.e., $y(s) = s^2$, escolhendo unidade de medida adequadas. Logo, $y(s) = s^2$. Disso, $dy = 2sds$ e $dy^2 = 4s^2ds^2 = 4y(dx^2 + dy^2)$, logo, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}}$, portanto,

    $$x = \int \frac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}}\, dy.$$

    (b) Faça $u = \sqrt{y}$ e mostre que $x = \dfrac{1}{2}u\sqrt{1-4u^2} + \dfrac{1}{4}\arcsin(2u)$ e $y = u^2$. Fazendo $\theta = \arcsin(2u)$, conclua que

    $$x(\theta) = \frac{1}{8}\left(2\theta + \text{sen}\,(2\theta)\right),\ y(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$$

    é uma parametrização para a curva solução do problema. Observe que, a menos de parametrização, a solução do problema da tautócrona também é uma ciclóide.

✰ Funções reais de duas e três variáveis

31. Ache e esboce o domínio das funções:

    (a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$
    (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^x}$
    (e) $f(x,y) = \tan(x-y)$ (f) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$
    (g) $f(x,y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

32. Esboce uma família de curvas de nível de:

    (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-y^2}$
    (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

33. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$
(d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$
(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$
(m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y) = \ln(9x^2 + y^2)$ (o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$
(p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

34. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

① Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

② A imagem de γ está contida na curva de nível de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

35. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

(a) $x + 2y + 3z = 1$ (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$
(g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

36. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $t \in [0,\pi[$, está contida numa esfera com centro em $(0,0,0)$ e esboce a imagem de γ.

37. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\operatorname{sen} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

38. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$
(c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t})$, $t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$
(e)$\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$

39. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$ e seja $\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+4})$, $t \geq 0$.

(a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

(b) Faça um esboço da imagem de γ.

40. Encontre uma parametrização para a curva de ní vel no nível k de f nos casos:

① $f(x,y) = x + 2y - 3$, $k = -2$;

② $f(x,y) = x - \sqrt{1-2y^2}$, $k = 5$;

③ $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$, $k = 1$.

Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

41. Encontre uma parametrização para as curvas C abaixo:

① C é a intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

② C é a intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.

③ C é a intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

④ C é a intersecção do cone $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$ com o plano $z = 2x + 1$.

⑤ $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$.

⑥ $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = x + 1\}$.

⑦ $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$.

42. Seja $f(x, y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

① Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

② Encontre uma curva diferenciável γ cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.

③ Determine o vetor tangente à curva γ do item anterior no ponto $(-1, 0)$.

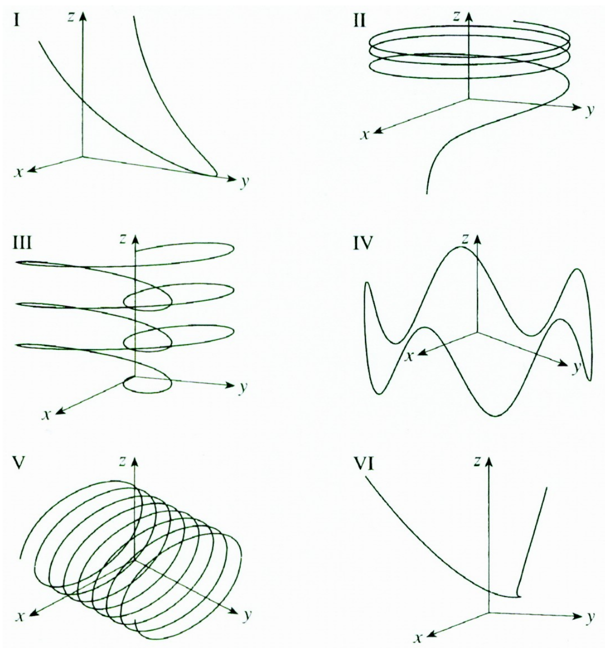
④ Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a γ em $\gamma(\frac{\pi}{3})$.

43. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

(a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \operatorname{sen} 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$

(c) $\gamma(t) = (t, \dfrac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} 3t \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t, t)$

(e) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 5t)$



☆ **Limites e continuidade**

44. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$ (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$ (p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2+2y^2}$

45. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo:

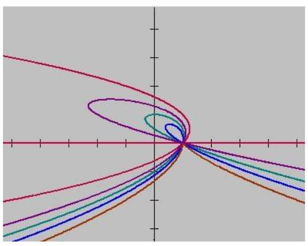
(a) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{e^x-y^2}$ (b) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x-y^3}}{1-x^2-y^2}$

(c) $f(x,y)=\arctan(x+\sqrt{1/y})$ (d) $f(x,y)=\arcsin(x^2+y^2)$

(e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^3} & \text{, se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{, se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)((x-1)^2+(y-1)^2)} & \text{, se } (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1) \\ 1 & \text{, se } (x,y)=(0,0) \text{ ou } (x,y)=(1,1) \end{cases}$

46. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | (x,y)\neq(1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k=0$, $k=0,3$, $k=0,5$, $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



☆ **Respostas**
(4) ① $r=a$; ② $r=1/(2\cos\theta+3\mathrm{sen}\,\theta)$;
③ $r=1/\sqrt{\cos(2\theta)}$; ④ $r=1/\sqrt{\cos^2\theta+2\mathrm{sen}^2\theta}$; ⑤ $r=e^{\theta}$; ⑥ $r=(\cos^{2/3}\theta+\mathrm{sen}^{2/3}\theta)^{-3/2}$; ⑦ $r=1/\theta$;
⑧ $r=2|\mathrm{sen}\,(2\theta)|$; **(6)** (a)-IV, (b)-VI, (c)-V, (d)-III, (e)-I, (f)-II; **(7)** Não; $\gamma(t)=(t^3,t^2)$; **(9)** ① $64\sqrt{5}$, ② $\sqrt{2}$, ③ $\pi^2/2$; **(10)** $8r$;
(12) $6a(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$;

(13) (1) $\pi/2$; (2) $9\pi/4$;

(11) $x(\theta)=r\theta+(R-r)\mathrm{sen}\,\theta$ e $y(\theta)=r\theta+(R-r)\cos\theta$;
(15) $t=1$: $x-y-1=0$ e $t=-2$: $2x+y-11=0$;

(18) $x=rt-R\mathrm{sen}\,t$ e $y=r-R\cos t$; **(23)** ③ $x=2r\mathrm{cotg}\,\theta$ e $y=2r\mathrm{sen}^2\theta$;

(24) ② $x=2r\mathrm{sen}^2\theta$ e $y=2r\left(\tan\theta-\frac{\mathrm{sen}\,(2\theta)}{2}\right)$;

(26) $x=a\theta\cos\theta$ e $y=a\theta\mathrm{sen}\,\theta$;

(31) (a) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\le x\}$; (b) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0\}$; (c) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>1\}$;
(d) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$;
(e) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq x+\frac{1+2k}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$; (f) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x)>0\}$;
(g) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2<16\}$;

(40) ① $x=1-2t,\ y=t$;
② $x=5+\sqrt{1-2t^2}$ e $y=t$; ③ $x=\cosh t,\ y=\sinh t$; **(36)** ① $\gamma(t)=(\cos t,\mathrm{sen}\,t,\cos 2t)$;

② $\gamma(t)=(2^{-1/2}\cos t,\mathrm{sen}\,t,-1/2+(1/2)\mathrm{sen}\,t)$; ③ $\gamma(t)=\frac{1}{2}(1+\cos t,\mathrm{sen}\,t,1+\cos t)$;
④ $\gamma(t)=(t,4t+1,\sqrt{20t^2+8t+1})$, $t\ge -1/2$; ⑤ $\gamma(t)=(\frac{1}{2}(1+\cos t),2^{-1/2}\mathrm{sen}\,t,\frac{1}{2}(3+\cos t)$; ⑥ $\gamma(t)=(\frac{t^2-1}{2},t,\frac{t^2+1}{2})$;
⑦ $\gamma(t)=(\frac{1}{2}(1+\cos t),2^{-1/2}\mathrm{sen}\,t,\frac{1}{2}(1-\cos t))$;

(43) a-V, b-VI, c-I,d-III, e-II, f-IV; **(39)** Os limites (a), (d), (f), (g), (k), (o) não existem; (b), (c), (h), (i), (j), (n), (p) existem e valem zero; (l), (m) existem e valem 1;
(45) (a) $\{(x,y) : y\neq e^{x/2}\}$; (b) $\{(x,y) : x\ge y^3$ e $x^2+y^2\neq 1\}$; (c) $\{(x,y) : y\ge 0\}$; (d) $\{(x,y) : x^2+y^2\le 1\}$; (e) $\mathbb{R}^2$;
(f) $\{(x,y) : (x,y)\neq(0,0)$ e $(x,y)\neq(1,1)\}$; **(46)** Não.