UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Matemática Diurno
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

☆ Funções reais de duas e três variáveis

1. Ache e esboce o domínio das funções:

   (a) $f(x,y)=\sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$
   (c) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y)=\dfrac{x}{y^x}$
   (e) $f(x,y)=\tan(x-y)$ (f) $f(x,y)=\ln(xy^2-x^3)$
   (g) $f(x,y)=\ln(16-4x^2-y^2)$

2. Esboce uma família de curvas de nível de:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y)=x-\sqrt{1-y^2}$
   (c) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

3. Esboce os gráficos de:

   (a) $f(x,y)=1-x-y$ (b) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+9y^2}$
   (d) $f(x,y)=4x^2+y^2$ (e) $f(x,y)=y^2-x^2$ (f) $f(x,y)=y^2+1$
   (g) $f(x,y)=y^2+x$ (h) $f(x,y)=xy$ (i) $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
   (j) $f(x,y)=\dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y)=(x-y)^2$ (l) $f(x,y)=x^2+y^2+2y+3$
   (m) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y)=\ln(9x^2+y^2)$ (o) $f(x,y)=2-\sqrt[4]{x^2+4y^2}$
   (p) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$

4. Seja $\gamma(t)=(e^t+1,e^{-t})$, para $t\in\mathbb{R}$.

   ① Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

   ② A imagem de γ está contida na curva de nível de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2y^2-2y-y^2+4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

5. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tais que:

   (a) $x+2y+3z=1$ (b) $x^2+2y^2+3z^2=1$ (c) $x^2+y^2-z^2=0$
   (d) $x^2+y^2-z^2=-1$ (e) $x^2+y^2-z^2=1$ (f) $x^2-y^2=1$
   (g) $x^2-y^2+z^2=1$

   Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$?

6. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [0, \pi[$, está contida numa esfera com centro em $(0,0,0)$ e esboce a imagem de γ.

7. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

8. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$
   (b) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$
   (c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t})$, $t \geq 0$
   (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t)$, $t \geq 0$
   (e)$\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2}\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$
   (f) $\gamma(t) = (1 + \sin t, 1 + \sin t, \cos t)$

9. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, \sqrt{t^2+4})$, $t \geq 0$.

   (a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

   (b) Façaa um esboço do traço de γ.

10. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível c de f nos casos:

   ① $f(x,y) = x + 2y - 3$, $c = -2$;

   ② $f(x,y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}$, $c = 5$;

   ③ $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$, $c = 1$.

   Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

11. Encontre uma parametrização para as curvas C abaixo:

   ① C é a intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   ② C é a intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.

   ③ C é a intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

   ④ C é a intersecção do cone $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$ com o plano $z = 2x + 1$.

   ⑤ $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$.

   ⑥ $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = x + 1\}$.

   ⑦ $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$.

12. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

   ① Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

   ② Encontre uma curva diferenciável γ cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.

   ③ Determine o vetor tangente à curva γ do item anterior no ponto $(-1, 0)$.

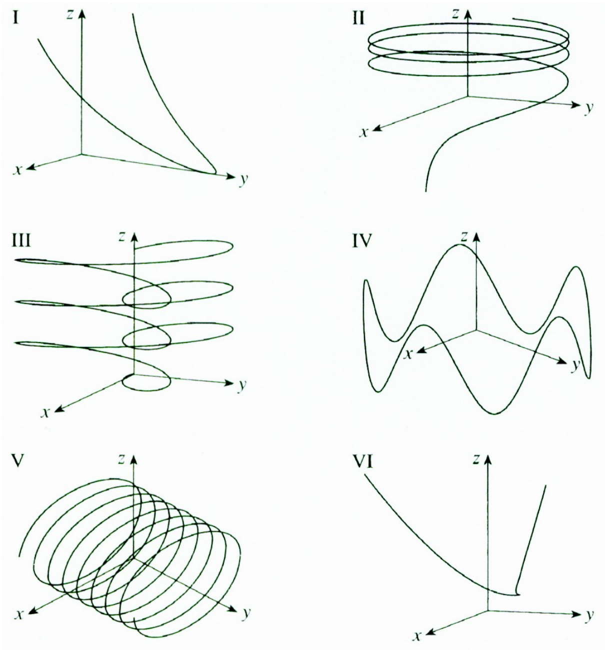
   ④ Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a γ em $\gamma(\frac{\pi}{3})$.

13. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

(a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \sin 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$

(c) $\gamma(t) = (t, \dfrac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\sin 3t\ \cos t, \sin 3t\ \sin t, t)$

(e)$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin 5t)$



☆ **Limites e continuidade**

14. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$ (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$ (p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$

15. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo:

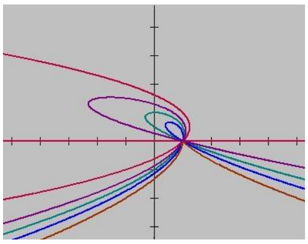
(a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{e^x - y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x - y^3}}{1 - x^2 - y^2}$

(c) $f(x,y) = \arctan(x + \sqrt{1/y})$ (d) $f(x,y) = \arcsin(x^2 + y^2)$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{2x^2 + y^3} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - y^2)(x-1)^2}{(x^2 + y^2)((x-1)^2 + (y-1)^2)} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1,1) \end{cases}$

16. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k = 0$, $k = 0,3$, $k = 0,5$, $k = 0,7$ e $k = 1$. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



☆ Derivadas parciais, gradiente e diferenciabilidade

17. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

(a) $f(x,y) = \arctan(y/x)$ (b) $f(x,y) = \ln(1 + \cos^2(xy^3))$ (c) $f(x,y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2 + y^2}$

18. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

(a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax + by)$, onde a e b são constantes.

(c) $u(x,y) = f(xy^2 - 2x)$ (d) $u(x,y) = f(e^{x^2+y^2})$

19. Dada a função $f(x,y) = x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\sin(x^2 y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$. (Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.)

20. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

21. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriváveis até 2a. ordem.

(a) Mostre que $u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

22. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

23. Calcule $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

    (a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu.$

    (b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t\sin u.$

    (c) $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t + u, z = t^2 + u^2.$

24. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Calcule g_u, g_v, em função de f_x, f_y nos seguintes casos:

    (a) $g(u,v) = f(u^2, v^3)$ (b) $g(u,v) = \sin u - f(2u - 3v^2, u - \cos v)$

    (c) $g(u,v) = f(\sin(u+v), \cos(u-v))$ (d) $g(u,v) = f(e^{u^2}, \ln(u+v))$

25. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ é **homogênea de grau** λ se satisfaz $f(tx,ty) = t^\lambda f(x,y)$ para todos $t > 0$ e $(x,y) \neq (0,0)$, para um certo $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo. Supondo que f é uma função de classe C^2 homogênea de grau λ, verifique que:

    (a) $xf_x + yf_y = \lambda f$; (Relação de Euler)

    (b) As funções f_x e f_y são homogêneas de grau $\lambda - 1$.

26. Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

    (a) $f(x,y) = 5x^2 + 2xy - y^2$ (b) $f(x,y) = \dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2+y^2}$

    (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+y^3}}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{xy\sin(y/x)}{x^4+y^4}$

27. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} + \sin(x+3y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Mostre que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

    (b) f é contínua em $(0,0)$?

    (c) f é diferenciável em $(0,0)$?

28. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Mostre que f é contínua em (0,0).

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) f é diferenciável em $(0,0)$?

(d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

29. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

30. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin\big((x^2+y^2)^2\big)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

(d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

31. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

32. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f é diferenciável, sendo:

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

(b) $f(x,y) = x|y|$

(c) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^4+y^4}}$

(d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

33. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y) = (x^2 y, y^2)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

34. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

35. Sejam $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2)=(a,-4)$ e

$$g(t)=f(2t^3-4t,t^4-3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y=2x+3$.

36. Seja $u=u(x,y)$ função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}(r,\theta)=\Delta u(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta),$$

onde, por definição, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$.

37. Seja $f=f(x,y)$ uma função de classe C^2 e seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $g(u,v)=uf(u^2-v,u+2v)$.

   (a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}$ em função das derivadas parciais de f.

   (b) Sabendo que $3x+5y=z+26$ é o plano tangente ao gráfico de f, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,4)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4)=1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4)=-1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(-2,3)$.

38. Seja $F(r,s)=G(\mathrm{e}^{rs},r^3\cos(s))$, onde $G=G(x,y)$ é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

   (b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1,t+1)=t^2-2t+3$.

39. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

   (a) $z=\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$ (b) $z=\ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$
   (c) $z=x^2-y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$. (d) $z=\mathrm{e}^x\ln y$, no ponto $(3,1,0)$.

40. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y)=x^3y$.

41. Determine $k\in\mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y)=\ln(x^2+ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x+z=0$.

42. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z=xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

43. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x+y+z=7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0,2,f(0,2)\big)$. Seja

$$g(u,v)=u\,f\big(\operatorname{sen}(u^2-v^3),2u^2v\big).$$

Determine $a\in\mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1,1,g(1,1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4,2,a)$.

44. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2,1)$.

45. O gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t > 0$ em um ponto P. Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém P, no ponto P.

46. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    (a) $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$, $(1,0)$; (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1,2)$;

47. Mostre que $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. É f diferenciável em $(0,0)$?

48. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva de nível de f. Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3,4)$.

49. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

    (b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.

    (c) Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário (isto é, $a^2 + b^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

    (d) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

50. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

51. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3,-1,0)$ e $(5,3,6)$.

✰ Máximos e mínimos

52. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

    (a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ (b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$ (c) $z = x^2 y^2$
    (d) $z = x^3 y^3$ (e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ (f) $z = y \cos x$
    (g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ (h) $z = y^4 + 4x^2 y - 4x^2 - 8y^2$ (i) $z = xye^{-x^2-y^2}$
    (j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ (k) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$

53. Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos, onde:

    (a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = x^3 y$.

    (b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x, y, z) = x - z$.

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$ e $f(x,y,z) = xz + y$.

(d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1 \text{ e } x-y+3z = 3\}$ e $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

54. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

(a) $f(x,y,z) = xe^z + \text{sen}(y)$, $P = (2,0,0)$ (b) $f(x,y,z) = -\frac{4}{y} + z\ln(x)$, $P = (1,2,-1)$

55. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por

$$V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz.$$

(a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?

(c) Qual é a maior taxa de variação em P?

56. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada.

(a) $f(x,y) = 5-3x+4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$

(b) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$

(c) $f(x,y) = 2x^3+y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

(d) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -3 \leq x \leq 3,\ -3 \leq y \leq 3\}$.

(e) $f(x,y) = (4x-x^2)\cos y$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

57. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

(a) $f(x,y) = xy$; $5x^2+5y^2+6xy-64 = 0$

(b) $f(x,y,z) = xyz$; $x^2+2y^2+3z^2 = 6$

(c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$; $x^2+y^2+z^2 = 1$

(d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; $x^4+y^4+z^4 = 1$

58. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em R sendo

(a) $f(x,y,z) = x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z$ e $R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 56\}$

(b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-4xy-4z+3x$ e $R = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 4\}$

59. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em D sendo:

(a) $f(x,y) = xy$; $D = \left\{(x,y) : x^2-y^2 = 1,\ x \in [1,2]\right\}$

(b) $f(x,y) = 2x^3+y^4$; $D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 = 1,\ x \in [0,1/4],\ y \geq 0\right\}$

60. Encontre os pontos da elipse $x^2+xy+y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

61. Qual o ponto do plano $x+2y-z+4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

62. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

63. Determine a distância entre as retas de equação

$X = (-2,3,-1) + \alpha(4,1,5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1,0,3) + \mu(-2,3,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

64. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?

65. Seja $b \neq 0$ e $f(x,y) = \dfrac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.

   (a) Determine, em função de b, o número de pontos críticos de f e classifique-os.

   (b) Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0,0)$, $(3,3)$ e $(-3,3)$.

66. Seja $f(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2xy$, onde a é uma constante.

   (a) Verifique que, para todo $a \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f.

   (b) Para cada valor de a, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de a para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f?

67. A temperatura num ponto (x,y,z) do espaço é dada por $T(x,y,z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

68. Determine as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

69. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

70. Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

71. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

72. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com $27cm^2$ de papelão.

✰ **Respostas**

(13) (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y^3\sin(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{3xy^2\sin(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$;
(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2y-y^3-y-2x}{(1+x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{xy^2-x^3-x-2y}{(1+x^2+y^2)^2}$;

(15) (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{y}f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{y^2}f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$; (b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = af'(ax+by)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = bf'(ax+by)$;
(c) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = (y-2)f'(xy^2-2x)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = xf'(xy^2-2x)$; (d) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2xf(e^{x^2+y^2})$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2yf(e^{x^2+y^2})$; (3) -2;

(21) (a) $g_u = 2uf_x(u^2,v^3)$; $g_v = 3v^2f_y(u^2,v^3)$; (b) $g_u = \cos u - 2f_x(2u-3v^2, u-\cos v) - f_y(2u-3v^2, u-\cos v)$; $g_v = -6vf_x(2u-3v^2, u-\cos v) + \sin v\, f_y(2u-3v^2, u-\cos v)$;
(c) $g_u = \cos(u+v)f_x(\sin(u+v),\cos(u-v)) - \sin(u-v)f_y(\sin(u+v),\cos(u-v))$;
$g_v = \cos(u+v)f_x(\sin(u+v),\cos(u-v)) + \sin(u-v)f_y(\sin(u+v),\cos(u-v))$;
(d) $g_u = 2ue^{u^2}f_x(e^{u^2},\ln(u+v)) + \dfrac{f_y(e^{u^2},\ln(u+v))}{u+v}$; $g_v = \dfrac{f_y(e^{u^2},\ln(u+v))}{u+v}$;

(23) (a) $\lambda = 2$; (b) $\lambda = -1$; (c) $\lambda = -1/3$; (d) $\lambda = -2$;

(24) (b) Não é contínua em (0,0); (c) Não é diferenciável em (0,0);

(25) (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.; (c) Não; (d)Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

(26) (b) Não; (14) (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y(x^2+y^2)^2\cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y\,\mathrm{sen}\,((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) Sim; (d) Sim.

(29) (a) f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$; (b) f não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$; (c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe C^1; (d) Idem ao item (c).

(31) -9600π cm^3/s; (18) $a = 3$; (21) (b) 21.

(35) (a) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2e^{2rs}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2e^{rs}s\cos s\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y} + 9r^4\cos^2 s\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2e^{rs}\dfrac{\partial G}{\partial x} + 6r\cos s\dfrac{\partial G}{\partial y}$; (b)0;

(36) (a) $z = 1$; $X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; (b)$2x + y - z - 1 = 0$; $X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
(c) $6x - 4y + z + 5 = 0$; $X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; (d) $e^3y - z - e^3 = 0$; $X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(37) $6x - y - z + 6 = 0$; (25) $k = 8$;

(40) $a = -4$; (28) $(1,4)$; (29) $X = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(43) (a) $\sqrt{5}$, $(1,2)$; (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$;

(44) f não é diferenciável em $(0,0)$; (32) $4/5$; (33) (d) Não; (35) $\pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{3}}\right)$

(49) (a) $(-3,2)$ mínimo; (b) $(2/3,1)$, $(-4/3,-1)$ selas; (c) $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda\in\mathbb{R}$ mínimos; (d) $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda\in\mathbb{R}$ selas; (e) $(4,4)$ máximo; (f) $(\pi/2+k\pi,0)$ com $k\in\mathbb{Z}$ selas; (g) $(1,1)$ máximo, $(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)$ selas; (h) $(0,0)$ máximo, $(0,2)$ mínimo, $(0,-2),(\sqrt{3},1),(-\sqrt{3},1)$ selas; (i) $(0,0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ mínimos; (j) $(1/3,0)$ mínimo; (k) $(2,1)$ e $(0,3)$ sela; $(2,3)$ mínimo e $(0,1)$ máximo;

(50) (a) pontos de máximo: $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}})$; pontos de mínimo: $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}})$. (b) ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{5}},1-\frac{2}{\sqrt{5}},2-\frac{4}{\sqrt{5}})$; ponto de mínimo: $(-\frac{1}{\sqrt{5}},1+\frac{2}{\sqrt{5}},2+\frac{4}{\sqrt{5}})$. (c) ponto de máximo: $(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$; ponto de mínimo: $(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$. (d) ponto de mínimo: $(\frac{1}{3},-\frac{1}{6},\frac{5}{6})$; não tem ponto de máximo.

(51) a) $\sqrt{6}$; $(1,1,2)$; (b) $\sqrt{2}$; $(-1,1,0)$; (39) (a) $\frac{32}{\sqrt{3}}$; (b) $(38,6,12)$; (c) $2\sqrt{406}$;

(53) (a) máximo: $f(4,5)=13$, mínimo: $f(4,0)=-7$; (b) máximo: $f(0,0)=0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=-\frac{1}{2e}$; (c) máximo: $f(1,0)=2$, mínimo: $f(-1,0)=-2$; (d) máximo: $f(2,0)=4$, mínimo: $f(3,-\frac{\pi}{4})=f(3,\frac{\pi}{4})=f(1,-\frac{\pi}{4})=f(1,\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(54) (a) max $f(2,2)=f(-2,-2)=4$; min $f(4,-4)=f(-4,4)=-16$; (b) max $2/\sqrt{3}$, min $-2/\sqrt{3}$; (c) max $1/27$, min 0; (d) max $\sqrt{3}$, min 1.

(56) (a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; (b) mínimo: $\frac{1}{32}+\left(\frac{15}{16}\right)^2$ e máximo 1.

(57) (a) $(1,1)$ e $(-1,-1)$; (45) $(0,-1,2)$; (46) $n_1=n_2=n_3=\frac{100}{3}$; (47) $\sqrt{12}$; (48) $(0,0,1)$ ou $(0,0,-1)$;

(62) (a) Se $b>0$, temos 5 pontos críticos: $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{b}},1\right)$ e $(0,-2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ máximo local e $(0,2)$ mínimo local; e se $b<0$, temos 3 pontos críticos: $(0,0)$ e $(0,2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ mínimo local; (b) Pontos de máximo: $(-3,3)$ e $(3,3)$; ponto de mínimo. $(0,2)$;

(63) (b) $a>1$: mínimo local; $-1<a<1$: sela; $a<-1$: máximo local; $a\geq 1$: $(0,0)$ é ponto de mínimo global; $a\leq -1$: $(0,0)$ é ponto de máximo global;

(64) Mais quentes: $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-1}{2}\right)$; Mais frios : $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-1}{2}\right)$;

(65) O paralelepípedo tem vértices em $(\pm1,\pm1,0)$ e $(\pm1,\pm1,2)$;

(66) $12(2-\sqrt{3})$, $2(3-\sqrt{3})$, $4(2\sqrt{3}-3)$; (54) $x+y+2z-6=0$;

(68) $2^{2/5}x+2^{9/10}y+2^{9/10}z=5$; $2^{2/5}x-2^{9/10}y+2^{9/10}z=5$; (69) base $3cm\times 3cm$ e altura $1,5cm$.