UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Matemática Diurno
Prof. Zeca Eidam

Lista 3

✰ Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

   (a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
   (b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$
   (c) $z = x^2y^2$
   (d) $z = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$
   (e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
   (f) $z = y\cos x$
   (g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$
   (h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$
   (i) $z = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
   (j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$
   (k) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$
   (l) $z = x^3y^3$
   (m) $z = x^{-2} + y^{-1} + xy$, $x > 0$, $y > 0$
   (n) $z = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$
   (o) $z = x^4 + y^4 + x + y$

2. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada.

   (a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$

   (b) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$

   (c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   (d) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -3 \leq x \leq 3,\ -3 \leq y \leq 3\}$.

   (e) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

3. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

   (a) $f(x,y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$

   (b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$; $xy = 1$, $x > 0$, $y > 0$

   (c) $f(x,y) = xy$; $x^2 + 4y^2 = 8$

   (d) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$; $x + 2y - 1 = 0$

   (e) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$; $x^2 + y^2 - 2x = 0$

   (f) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$; $x + 2y = 3$

   (g) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$; $x^2 + 2y^2 = 1$

   (h) $f(x,y) = xy$; $x^2 - y^2 = 1$, $1 \leq x \leq 2$

   (i) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $x^2 + y^2 = 14$, $0 \leq x \leq 1/4$, $y \geq 0$

4. Encontre os pontos da curva $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos e mais afastados da origem.

5. Determine o ponto da reta $x + 2y = 1$ cujo produto das coordenadas seja máximo.

6. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

7. Qual o ponto do plano $x+2y-z+4=0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

8. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

9. Determine o ponto do plano $x+2y-z=4$ mais próximo da origem.

10. Encontre o(s) ponto(s) da curva $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$ que se encontram mais próximos da origem.

11. Encontre o(s) ponto(s) da curva $x^2-6xy-7y^2+80=0$ que se encontram mais próximos da origem.

12. Determine a distância entre as retas de equações

$$r:(x,y,z)=(-2,3,-1)+\alpha(4,1,5)\,,\alpha\in\mathbb{R}$$
$$s:(x,y,z)=(-1,0,3)+\mu(-2,3,1)\,,\mu\in\mathbb{R}.$$

13. Determine o ponto do plano $3x+2y+z=12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja mínima.

14. Seja $f(x,y)=a(x^2+y^2)-2xy$, onde a é uma constante.

    (a) Verifique que, para todo $a\in\mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f.

    (b) Para cada valor de a, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de a para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f?

15. Seja $b\neq 0$ e $f(x,y)=\dfrac{y^4}{4}+bx^2y-bx^2-2y^2$.

    (a) Determine, em função de b, o número de pontos críticos de f e classifique-os.

    (b) Faça $b=3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0,0)$, $(3,3)$ e $(-3,3)$.

16. Deduza a fórmula usual da Geometria Analítica para distância de um ponto a uma reta no plano.

✰ Máximos e mínimos de funções de três variáveis

17. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

    (a) $f(x,y,z)=xyz;\quad x^2+2y^2+3z^2=6$

    (b) $f(x,y,z)=x^2y^2z^2;\quad x^2+y^2+z^2=1$

    (c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2;\quad x^4+y^4+z^4=1$

    (d) $f(x,y)=xy;\quad 5x^2+5y^2+6xy-64=0$

18. Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos:

(a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x,y,z) = x - z$.

(b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $f(x,y,z) = xz + y$.

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

19. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em E sendo

    (a) $f(x,y,z) = x + 2y + z$ e $E = \{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 4\}$

    (b) $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$

    (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $E = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}$

20. Considere o conjunto C formado pela intersecção do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e do plano $x + y + z = 1$. Encontre os pontos de C que se encontram mais próximos e mais afastados da origem.

21. Determine o ponto da reta $r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ que se encontra mais próximo da origem.

22. Determine o ponto do plano $\pi : x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

23. Deduza a fórmula usual da Geometria Analítica para distância de um ponto a um plano.

24. Deduza a fórmula usual da Geometria Analítica para distância de um ponto a uma reta no espaço tridimensional.

25. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?

26. Maximize $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

27. Considere a função $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ definida em $D = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$. Determine o plano tangente ao gráfico de f que forma com o planos coordenados o tetraedro de volume mínimo.

28. Determine o ponto da superfície $xyz = 1$, $x > 0$, $y > 0$, que se encontra mais próximo da origem.

29. Determine três números positivos cuja soma seja 36 e cujo produto seja máximo.

30. A *fórmula de Heron*

    $$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

    fornece a área de um triângulo em função dos comprimentos dos lados a, b, c e do semiperímetro $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Use esta fórmula para determinar, dentre os triângulos de mesmo perímetro, os de maior área.

31. Neste exercício, provaremos que a *média geométrica de três números positivos é menor ou igual que sua média aritmética*, i.e.,

    $$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

    (a) Dado $c > 0$, determine o valor máximo de $f(x,y,z) = xyz$ sujeita às restrições $x + y + z = c$, $x, y, z \geq 0$.

    (b) Conclua a desigualdade procurada.

(c) Mostre que as médias geométrica e aritmética entre três números positivos coincidem se e só se os três números são iguais.

32. A temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

33. Determine as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

34. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

35. Determine a equação do plano que passa por $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

36. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

37. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

38. Determine entre os paralelepípedos retângulos de mesmo volume os de área máxima.

39. Determine as dimensões que maximizam o volume de um paralelepípedo retângulo de área total 100cm^2.

40. Determine o paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos de volume máximo que pode ser inscrito no elipsóide
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1\,.$$

41. Determine P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e Q na reta $x + y = 4$ de forma que a distância de P a Q seja a menor possível.

42. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com três de suas faces contidas nos planos coordenados, contido no tetraedro
$$\left\{(x, y, z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y + 3z \leq 12\right\}.$$

43. Desejamos construir uma caixa, sem tampa, com 1m^3 de volume e com a forma de um paralelepípedo retângulo. O material usado para fazer o fundo custa o dobro do que será utilizado nas laterais. Determine as dimensões da caixa que minimizam o custo do material.

44. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, considere $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \langle (x, y), H(x, y)\rangle$, onde $H = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$. Considere o problema de maximizar/minimizar q sobre o círculo unitário $C : x^2 + y^2 = 1$.

    (a) Mostre que os multiplicadores de Lagrange associados a este problema são exatamente os autovalores de H. (Como H é simétrica, seus autovalores são reais.)

(b) Como q é homogênea de grau 2, use a relação de Euler para mostrar que, se (x_0, y_0) é um extremante de q em C e λ_0 é o multiplicador de Lagrande associado, então $q(x_0, y_0) = \lambda_0$.

(c) Conclua que, se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ são os autovalores de H, então λ_1, λ_2 são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de q sobre C.