UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Matemática Diurno
Prof. Zeca Eidam

Lista 4

☆ Aplicações do Teorema da Função Implícita

1. Verifique se as equações abaixo definem implicitamente y como função de x ou x como função de y em uma vizinhança da solução P dada e calcule a derivada da função definida implicitamente:

   (a) $x^2y^3 + y\cos x + \cos(xy) = 1$, $P = (0,0)$
   (b) $x^{xy} + (\operatorname{sen} x)\ln(1+y^2) = 1$, $P = (\pi/2, 0)$
   (c) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + 1 = 0$, $P = (1,0)$
   (d) $\operatorname{sen}(x^2 + xy^2) + x + \ln y = 0$, $P = (0,1)$
   (e) $e^{x+y} + 2x + y = 1$, $P = (0,0)$
   (f) $(1+x^2)^y + (1+y^2)^x = 2$, $P = (0,0)$
   (g) $y\sin x + x\sin y = 0$, $P = \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{l\pi}{2}\right)$, onde k, l são inteiros ímpares
   (h) $\left(\ln(1+x^2+y^2)\right)^{\cos(x+y)} - \arctan y = 0$, $P = (0,0)$
   (i) $x^2y^2 + x + y^3 = 1$, $P = (0,1)$
   (j) $x^{2014}y^{2013} + x^{2013}y^{2012} + \ldots + x^2y + x + y = 7$, $P = (0,7)$

2. Verifique se as equações abaixo definem implicitamente uma das variáveis em função das outras duas em uma vizinhança da solução P dada e calcule as derivadas parciais da função definida implicitamente:

   (a) $e^{x+y-z^2} - \cos(1 - xz^4) = 0$, $P = (1,0,1)$
   (b) $xy^5 + x^3z^7 + y^2z^3 = 3$, $P = (1,1,1)$
   (c) $\ln(x + y + \sin z) + 2^{(x-1)y+2z} - 1 = 0$, $P = (1,0,0)$
   (d) $(1+x^2)^{y+z} + (1+y^2)^{x+z} + (1+z^2)^{x+y} = 3 - \sin(x+y+z)$, $P = (0,0,0)$
   (e) $\pi x e^{yz} + ye^{xz} + ze^{xy} = 4\arctan(x + y^2 - 3z)$, $P = (1,0,0)$
   (f) $x^{y+z} + y^{x+z} + z^{x+y} = 6$, $P = (2,1,1)$

3. Verifique se os sistemas de equações abaixo definem implicitamente duas das variáveis em função da outra em uma vizinhança da solução P dada e calcule as derivadas da função definida implicitamente:

   (a) $\begin{cases} x^2 + xz + xy + z = 0 \\ \operatorname{sen} x + yz + 5xyz^4 = 0 \end{cases}$, $P = (0,0,0)$

(b) $\begin{cases} x^y + y^z + z^x &= 1 \\ y^x + z^y + x^z &= 1 \end{cases}$, $P = (1,1,1)$

(c) $\begin{cases} \sin(x^2 + 6y + z^3) + \cos(x - y + 3z^2) &= 1 \\ \arctan(x^3 z^2 - y + 4x^2) + 6x - 4z^4 &= 0 \end{cases}$, $P = (0,0,0)$

(d) $\begin{cases} 3x^2 - 4y^3 z + 2y &= 2 \\ 7xy^3 - 5xyz + 3y - z &= 3 \end{cases}$, $P = (0,1,0)$

(e) $\begin{cases} e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} &= 3\sin(x^2 + y^4 + 7z + \pi/2) \\ \sin(xy) + \sin(yz) + \sin(xz) &= e^{x^2+y^4+7z} - 1 \end{cases}$, $P = (0,0,0)$

(f) $\begin{cases} e^{\sin(x+y)} + e^{\sin(y+z)} + e^{\sin(x+z)} &= \ln(1 + \tan(xyz)) + 3 \\ \sin(xy) + \cos(yz) + \sin(x+y+z) &= (1+x^2)^{x+3z} \end{cases}$, $P = (0,0,0)$

4. Seja $\varphi = \varphi(x)$ uma função real da variável x que satisfaz a equação

$$\sin(11x - \varphi(x)^4) - 4x^3 e^{\varphi(x)+17x} = 0\,.$$

Mostre que φ é uma função de classe C^∞.

5. Temos trabalhado desde o ínicio com funções reais de duas ou três variáveis e estudamos o teorema da função implícita neste contexto. As mesmas idéias utilizadas aqui provam este resultado no contexto mais geral de uma função real de classe C^k definida em um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Este resultado pode ser utilizado para mostrar que uma *perturbação de classe* C^1 dos coeficientes de um polinômio produz uma *perturbação de classe* C^1 das raízes simples do polinômio.

Mostre que se $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raiz *simples* da equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

então existem intervalos abertos $I_0, I_1, \ldots, I_n, J$ contendo $a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0$, respectivamente, e uma função $\varphi : I_0 \times I_1 \times \ldots \times I_n \to J$ de classe C^∞ que associa a cada $(n+1)$-upla de coeficientes $a'_0, a_1, \ldots, a'_n$ a única raiz $f(a'_0, a_1, \ldots, a'_n)$ da equação polinomial

$$a'_n x^n + a'_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a'_1 x + a'_0 = 0$$

em J. Observe neste caso o que ocorre com as raízes duplas. Reflita sobre isto e compare este resultado com a fórmula de Bhaskara para $n = 2$.