UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 21/03/2014

Nome: ____________________

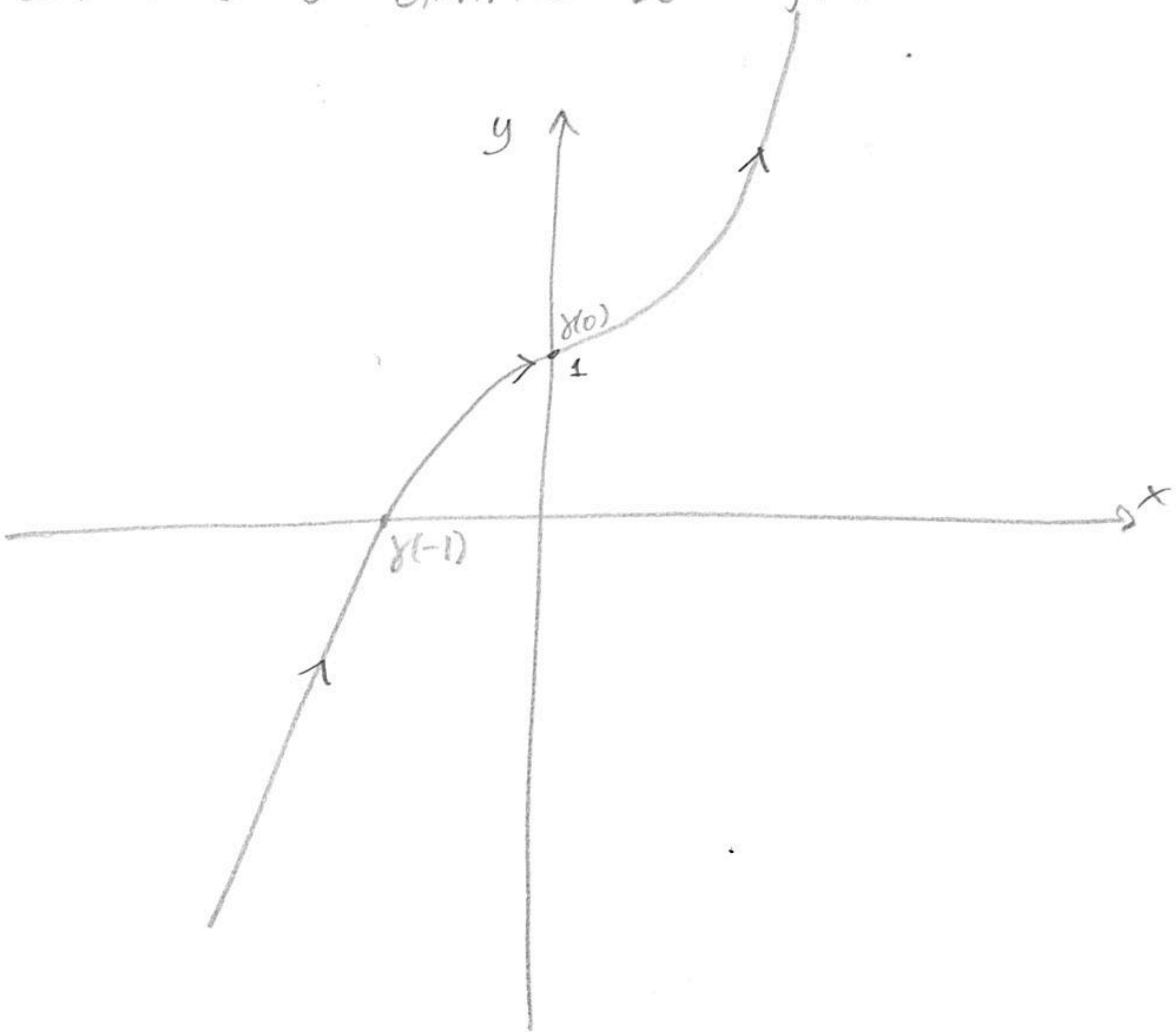
GRR: ____________ **Assinatura:** ____________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve escolher entre a questão **3** e a questão **4**;
3. Você deve justificar todas as suas respostas;
4. Faça a prova a lápis;
5. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
6. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
7. Boa prova!

Questão 1 (2 pontos) Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t^3, t^9 + 1)$. Esboce o traço de γ. (Sugestão: faça $u = t^3$, isso poupa muito trabalho!)

PONDO $u = t^3$, TEMOS $\gamma(t) = (u, u^3+1)$. COMO $u = u(t)$ É CRESCENTE SOBREJETORA, O TRAÇO DA CURVA É O GRÁFICO DE $f(u) = u^3+1$.



Questão 2 Áreas e comprimentos

(a) **(2 pontos)** Calcule o comprimento da curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

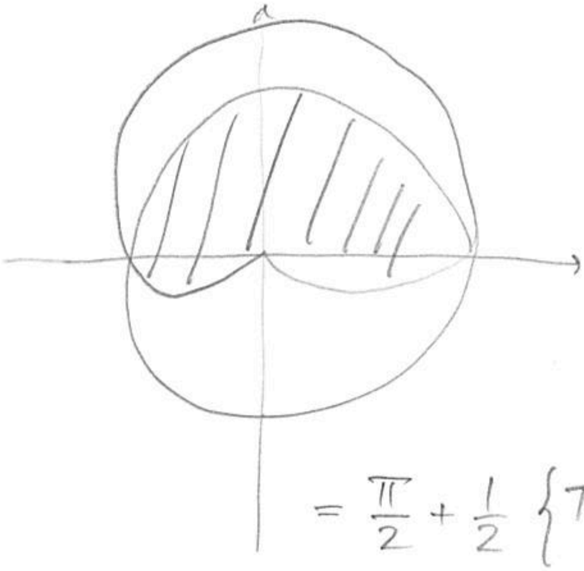
$$\gamma(t) = (2t - \text{sen}(2t), 1 - \cos(2t)).$$

$$\gamma'(t) = 2(1 - \cos 2t,\ \text{sen}\ 2t)$$

$$|\gamma'(t)| = 4|\text{sen}\, t|$$

$$\therefore\quad L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt = 4\left\{\int_0^{\pi} \text{sen}\, t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\text{sen}\, t)\,dt\right\} = 16.$$

(b) **(2 pontos)** Calcule a área da região interior à circunferência $r = 1$ e à cardióide $r = 1 + \text{sen}\theta$.



$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} (1 + \text{sen}\,\theta)^2\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left\{\int_{\pi}^{2\pi} d\theta + 2\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\,\theta\,d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}^2\theta\,d\theta\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left\{\pi - 2 + \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{5\pi - 8}{4}.$$

Questão 3 **(4 pontos)** Calcule todos os elementos necessários e esboce o traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (2t^3 - 15t^2 + 36t, t^3 - 12t).$$

* $x' = 6t^2 - 30t + 36$

$y' = 3t^2 - 12$

$x'' = 12t - 30$

$y'' = 6t$

x': + + + (2) − − (3) +

y': + + (−2) − − − − (2) + + +

* $|\gamma'|^3 k = x'y'' - x''y' = -90(3t^2 - 4t - 4)$

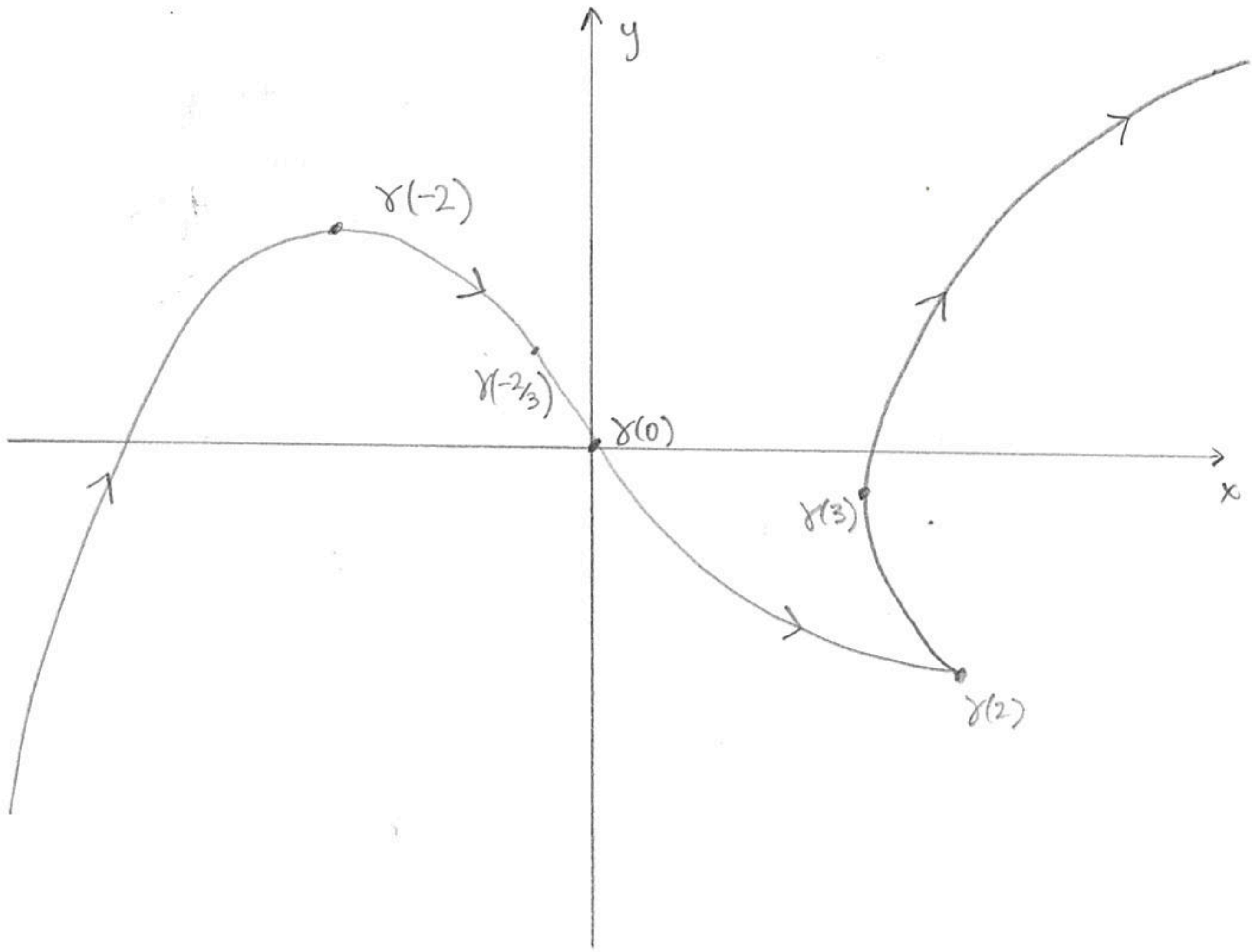
k: − − − − ($-2/3$) + + + (2) − − −

* $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = \pm\infty$

$\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\infty$

*

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -2/3)$	$(-2/3, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
x	↑	↑	↑	↓	↑
y	↑	↓	↓	↑	↑
k	< 0	< 0	> 0	< 0	< 0



y
x
$\gamma(-2)$
$\gamma(-2/3)$
$\gamma(0)$
$\gamma(3)$
$\gamma(2)$

Questão 4 **(4 pontos)** Parametrize e esboce a imagem da curva dada pela equação

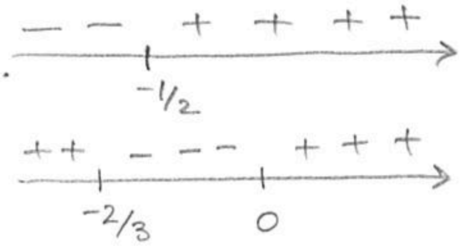
$$x^3 = xy + y^2.$$

* $\boxed{t = y/x}$ $\qquad x^3 = x\cdot tx + t^2x^2 \quad \therefore$

$$\begin{cases} x = t + t^2 \\ y = t^2 + t^3 \end{cases}$$

* $x' = 1 + 2t \implies t_1 = -1/2$

$y' = 2t + 3t^2 \implies t_2 = 0, \quad t_3 = -2/3$



* $|\gamma'|^3 k = x'y'' - x''y' = 2(3t^2 + 3t + 2) > 0$

*

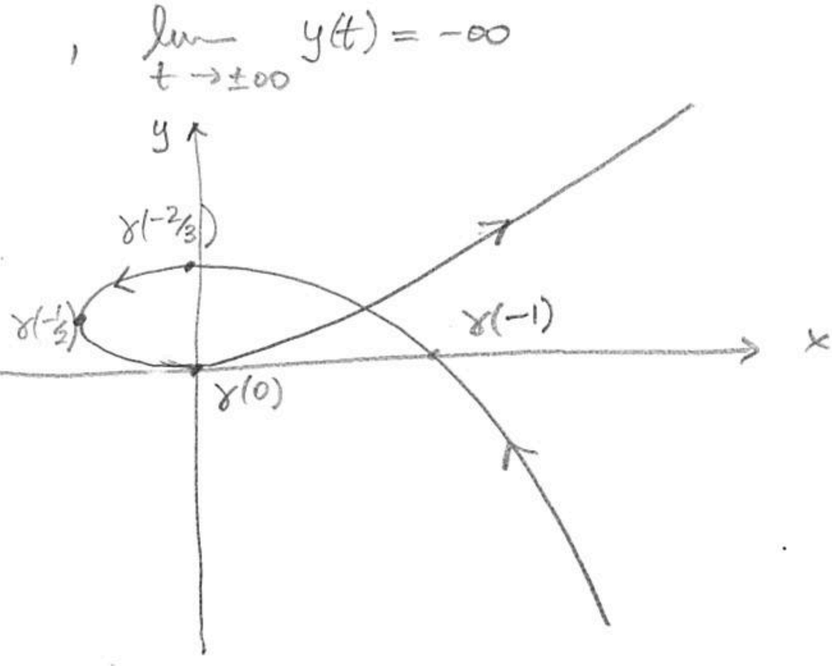
	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, \infty)$
x	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
y	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
k	>0	>0	>0	>0

* $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = -\infty$

$\gamma(-2/3) = (-2/9, 4/27)$

$\gamma(0) = (0, 0)$

$\gamma(-1/2) = (-1/4, 1/8)$



Questão 5 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, uma curva (diferenciável) regular cuja **curvatura é zero em todos os pontos.**

(a) **(1,5 ponto)** Mostre que a função $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ é constante (em todos os pontos em que estiver definida).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2} = \frac{|\gamma'|^3 \cdot \overset{=0}{k}}{(x')^2} = 0$$

$\therefore \dfrac{y'}{x'} = C$, PARA ALGUM $C \in \mathbb{R}$.

(b) **(1,5 ponto)** Mostre que o traço de γ está contido em uma reta.

COMO $\dfrac{y'}{x'} = C$ ENTÃO $(y - Cx)' = 0 \therefore$

$y = Cx + D$, PARA ALGUM $D \in \mathbb{R}$.

CASO $x' \equiv 0$, TOME y' EM LUGAR DE x' E REFAÇA AS CONTAS COM $\dfrac{x'}{y'}$, OBTENDO $x = C'y + D$.