UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Turma A - Matemática Diurno
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

GABARITO

TERCEIRA PROVA - 03/06/2014

Nome: ____________________

GRR: ____________ **Assinatura:** ____________________

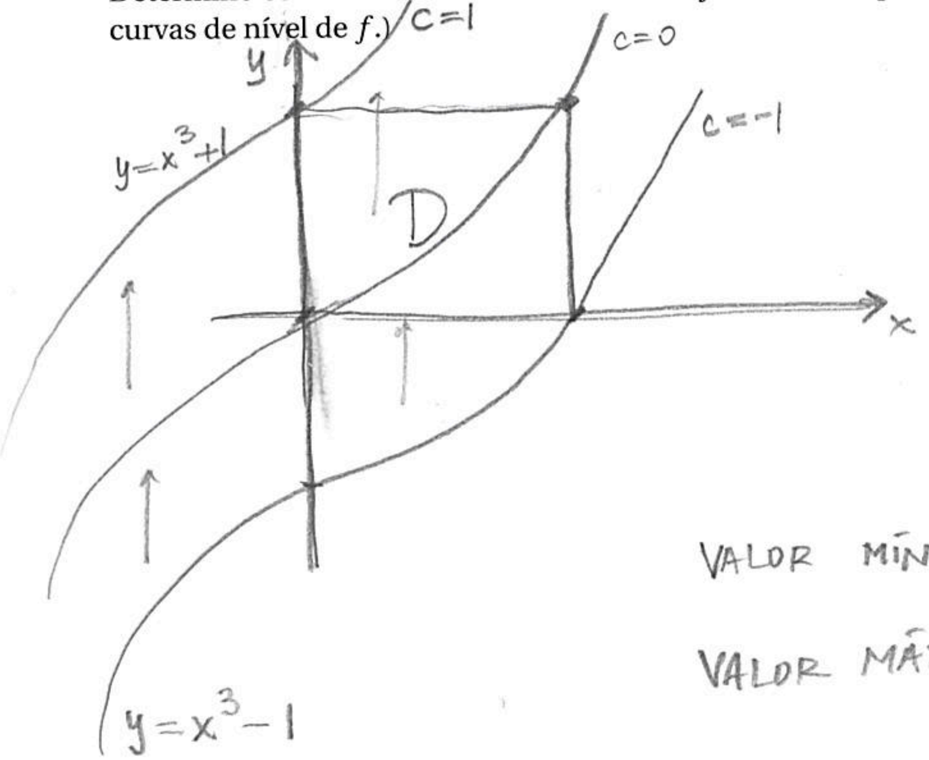
ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 **(2 pontos)** Sejam $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = y - x^3.$$

Determine os valores máximo e mínimo de f em D. (Dá para fazer sem contas, somente usando as curvas de nível de f.)



MÍNIMO GLOBAL: $(1,0)$

MÁXIMO GLOBAL: $(0,1)$

VALOR MÍNIMO $= -1$

VALOR MÁXIMO $= 1$.

Questão 2 (3 pontos) Sejam $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ e $f(x,y,z) = x^2yz$, $(x,y,z) \in E$. Determine os pontos de máximo e mínimo de f em E e os respectivos valores máximo e mínimo.

NO INTERIOR

$$f_x = 2xyz$$
$$f_y = x^2z$$
$$f_z = x^2y$$

$\therefore$ OS PONTOS CRÍTICOS SÃO DA FORMA $(0,y,z)$, $(x,0,0)$ OU $(0,0,z)$. COMO f SE ANULA EM TAIS PONTOS, NENHUM DELES PODE SER EXTREMANTE

POIS $f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \frac{1}{9} > 0$ E $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{9} < 0$

NA FRONTEIRA $\quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xyz = 2\lambda x \\ x^2z = 2\lambda y \\ x^2y = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}.$$

SE ALGUMA DAS COORDENADAS x, y OU z É NULA, O PONTO NÃO É EXTREMANTE.
$\therefore$ PODEMOS SUPOR $xyz \neq 0$.

$$\therefore \frac{xyz}{x} = \frac{x^2z}{2y} = \frac{x^2y}{2z} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = 2y^2 \\ z^2 = y^2 \end{array}.$$

COMO $x^2+y^2+z^2 = 1$, ENTÃO $y = \pm\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = \pm\frac{1}{2}$.

PELO TEO. DE WEIERSTRASS E PELA COMPACIDADE DA ESFERA, CONCLUÍMOS QUE OS PONTOS DE MÁXIMO SÃO $\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ E OS MÍNIMOS SÃO $\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, COM VALORES MAX/MIN. $1/8$ $-1/8$

Questão 3 (2,5 pontos) Mostre que o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overbrace{y+\operatorname{sen}(xyz)+\tan(2z)}^{f(x,y,z)} & = & 0 \\ \underbrace{e^{x+y}-\cos(xyz)-2z}_{g(x,y,z)} & = & 0 \end{array}\right.$$

define implicitamente $x = x(z)$ e $y = y(z)$ como funções de z em uma vizinhança da solução $(0,0,0)$ e determine $\dfrac{dx}{dz}(0)$ e $\dfrac{dy}{dz}(0)$

$$\begin{pmatrix} \nabla f(0) \\ \nabla g(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

COMO ESTA MATRIZ É NÃO SINGUL

SEGUE QUE z PODE SER US

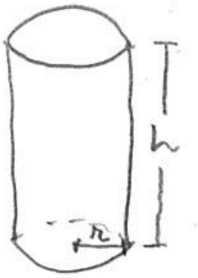
COMO PARÂMETRO PARA AS SOLUÇÕES $(x, y, z) = (x(z), y(z), z$

TEMOS

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx/dz(0) \\ dy/dz(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore \dfrac{dx}{dz}(0) = -2$, $\dfrac{dx}{dz}(0) + \dfrac{dy}{dz}(0) = 2 \quad \therefore \dfrac{dy}{dz}(0) = 4.$

Questão 4 **(2,5 pontos)** Uma fábrica de embalagens deseja fabricar em série latas metálicas em formato de cilindro circular reto (com tampas) utilizando 1m$^{\cancel{3}\,2}$ de material para cada uma. Determine o raio e a altura do cone que maximizam o volume da embalagem.



$$V = \pi r^2 h$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 1$$

$$\nabla V = \lambda \nabla A$$

$$(2\pi r h, \pi r^2) = \lambda(4\pi r + 2\pi h, 2\pi r)$$

$$\begin{cases} 2\pi r h = \lambda(4\pi r + 2\pi h) \\ \pi r^2 = 2\lambda \pi r \end{cases} \overset{r>0}{\Rightarrow} \begin{cases} rh = \lambda(2r+h) \\ r = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{r}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ rh = \frac{r}{2}(2r+h) \Rightarrow h = \frac{1}{2}(2r+h) = r + \frac{h}{2}$$

$\therefore \boxed{r = \frac{h}{2}}$. COMO $2\pi r^2 + 2\pi r h = 1$, ENTÃO

$$2\pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{h}{2} \cdot h = 1 \Rightarrow \frac{\pi h^2}{2} + \pi h^2 = 1 \Rightarrow h = \sqrt{2/3\pi}$$

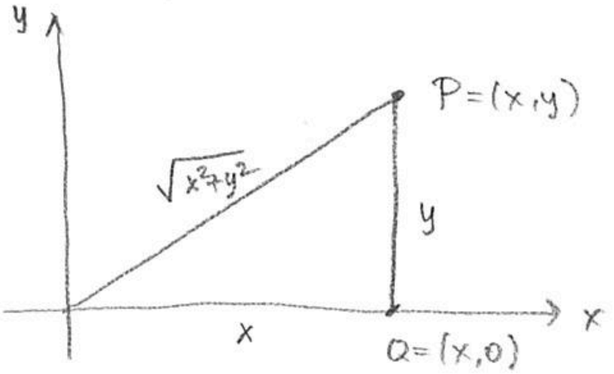
$$r = \frac{\sqrt{2/3\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}.$$

COMO PODEM SER CONSTRUÍDAS EMBALAGENS DE VOLUME ARBITRARIAMENTE PEQUENO, O PONTO ENCONTRADO É DE MÁXIMO.

Questão 5 Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ e considere $P = (x,y) \in D$ e $Q = (x,0)$ a projeção orotogonal de P sobre a reta $y = 0$. Chamemos de $\mathscr{C}$ o lugar geométrico dos pontos tais que a soma entre a área e o perímetro do triângulo OPQ é constante igual a 1977.

1. **(1,5 ponto)** Encontre uma *equação algébrica* que defina $\mathscr{C}$, i.e., encontre $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $\mathscr{C} = \{(x,y) \in D : f(x,y) = 0\}$.
2. **(1,5 ponto)** Mostre que a equação obtida determina localmente y como função de x e x como função de y em uma vizinhança de qualquer ponto $P \in \mathscr{C}$ e determine equações definindo tais funções implicitamente.

(1)



$$\overbrace{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}^{\text{PERÍMETRO OPQ}} + \overbrace{\frac{xy}{2}}^{\text{ÁREA OPQ}} = 1977$$

(2) $$f(x,y) = x + y + \sqrt{x^2+y^2} + \frac{xy}{2} - 1977$$

$$f_x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{2} > 0$$

$$f_y = 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{2} > 0$$

COMO f_x, f_y SÃO POSITIVAS, PELO TEO. DA FUNÇÃO IMPLÍCITA, TEMOS LOCALMENTE $y = y(x)$ E $x = x(y)$