UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Turma A - Matemática Diurno
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

PROVA SUBSTITUTIVA - 06/06/2014

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ____________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2\sqrt{|y|}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. **(1 ponto)** Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ que torna f contínua em $(0,0)$.

$$\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\sqrt{|y|}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\sqrt{|y|}\right)}{x^2\sqrt{|y|}}}_{\searrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{LIMITADO}} \cdot \underbrace{\sqrt{|y|}}_{\downarrow 0} \xrightarrow{(x,y)\to}$$

$\therefore\ a = 0.$

2. **(2 pontos)** Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\left(h^2\sqrt{|k|}\right)}{h^2\sqrt{|k|}}}_{\searrow 1} \cdot \underbrace{\frac{h^2}{h^2+k^2}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{\sqrt{|k|}}_{\searrow 0} \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} 0$$

$\therefore$ f É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$.

Questão 2 Sejam $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f(2,-1)=3$ e π o plano em $\mathbb{R}^3$ definido pela equação

$$8x - 12y - 4z = 1977.$$

1. **(1 ponto)** Admitindo que π seja paralelo ao gráfico de f em $(2,-1,7)$, determine $f_x(2,-1)$ e $f_y(2,-1)$.

$$\pi: \quad z + \frac{1977}{4} = 2x - 3y \quad \therefore \quad f_x(2,-1) = 2$$

$$f_y(2,-1) = -3$$

2. **(2 pontos)** Considere

$$g(x,y) = (x+3y^3)\, f\left(\cos x + y^2, \ln(1+x^2) - e^{xy}\right).$$

Determine o valor de a para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(0,1,g(0,1))$ seja paralelo à reta $(x,y,z) = (2014,2015,2016) + \lambda(a,1,a)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$g_x = f\left(\cos x + y^2, \ln(1+x^2) - e^{xy}\right) + (x+3y^3)\Big(f_x(\cdot,\cdot)(-\operatorname{sen} x) + f_y(\cdot,\cdot)\Big(\frac{2x}{1+x^2} - ye^{xy}\Big)\Big)$$

$$g_y = 9y^3 f(\cdot,\cdot) + (x+3y^3)\Big\{f_x(\cdot,\cdot)\cdot 2y + f_y(\cdot,\cdot)(-xe^{xy})\Big\}$$

$$\therefore \quad g_x(0,1) = f(2,-1) + 3\big\{2\cdot 0 - 3\cdot(0 - 1e^0)\big\} = 3 + 9 = 12$$

$$g_y(0,1) = 9f(2,-1) + 3\big\{2\cdot 2\cdot 1 + (-3)\cdot 0\big\} = 9\cdot 3 + 12 = 39$$

$$\therefore \quad (12,39,-1) \perp (a,1,a) \Rightarrow 12a + 39 - a = 0$$

$$\boxed{a = -39/11}$$

3. **(2 pontos)** Seja $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, uma curva de classe C^1 tal que $\gamma(0) = (2,-1)$ e

$$f(x(t), y(t)) = 2t^4 + 3t^3 - 6t^2 + 13\text{sen}(t^2) + 3,$$

para todo $t \in (-1,1)$. Determine a reta tangente a γ em $t = 0$.

$$f_x(x,y)\cdot x' + f_y(x,y)\cdot y' = 8t^3 + 9t^2 - 12t + 26t\cos(t^2)$$

em $t=0$:

$$2x'(0) - 3y'(0) = 0 \quad \therefore \quad y'(0) = \frac{2}{3}x'(0)$$

LOGO, $\gamma'(0) = (x'(0), y'(0)) = x'(0)\left(1, \frac{2}{3}\right)$. ASSIM, A RETA TANGENTE A γ EM $t=0$ É

$$\boxed{r: (x,y) = (2,-1) + \lambda\left(1, \frac{2}{3}\right), \ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Questão 3 (2 pontos) Considere a equação

$$e^{2x+2y}\text{sen}(3xy) + e^{2xy}\text{sen}(3x+3y) = 0$$

nas variáveis reais x e y. Mostre que toda solução desta equação suficientemente próxima da solução $(0,0)$, pode ser escrita na forma $(x, y(x))$ e determine a reta tangente ao gráfico da função $y = y(x)$ no ponto $(0,0)$.

$$f(x,y) = e^{2x+2y}\,\text{sen}(3xy) + e^{2xy}\,\text{sen}(3x+3y)$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = 2e^{2x+2y}\,\text{sen}(3xy) + 3xe^{2x+2y}\cos(3xy) +$$

$$+ 2xe^{2xy}\,\text{sen}(3x+3y) + 3e^{2xy}\cos(3x+3y)$$

$f_y(0,0) = 3 \neq 0 \quad \therefore$ PELO TEO. DA FUNÇÃO IMPLÍCITA, TODA SOLUÇÃO 'PRÓXIMA' DE $(0,0)$ PODE SER ESCRITA COMO $(x, y(x))$, com $y = y(x)$ DE CLASSE C^∞

TEMOS $\quad y'(0) = -\dfrac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\dfrac{3}{3} = -1$

$\therefore$ A RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE $y(x)$ EM $(0,0)$ É $\quad r: \; y - 0 = -1(x-0)$, i.e.,

$$\boxed{r: \; y + x = 0}$$

Questão 4 (3 pontos) Considere $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 y^2$. Determine os valores máximo e mínimo de f em D.

INTERIOR

$f_x = 3x^2y^2 = 0$ OS PONTOS CRÍTICOS SÃO

$f_y = 2x^3y = 0$ DA FORMA $(x,0)$ OU $(0,y)$,

MAS ESTES NÃO PODEM SER EXTREMANTES POIS

$f(0,x) = f(0,y) = 0$ E f ASSUME VALORES >0 E <0.

BORDA ∂D: $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases} : \begin{cases} 3x^2y^2 = \lambda \cdot 2x \\ 2x^3y = \lambda \cdot 2y \end{cases}$$

; PODEMOS ASSUMIR $x \neq 0$ E $y \neq 0$

$\therefore \frac{3}{2} x y^2 = \lambda = x^3 \quad \therefore \frac{3}{2} y^2 = x^2$. COMO $x^2+y^2 = 1$

ENTÃO $\frac{3}{2}y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{5} \therefore y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ E $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$

$= \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$. TEMOS 4 PONTOS CANDIDATOS A EXTREMANTE

$P_1 = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \to f(P_1) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$

$P_2 = \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \to f(P_2) = -\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$

$P_3 = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \to f(P_3) = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$

$P_4 = \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \to f(P_4) = -\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

COMO D É COMPACTO E SEUS EXTREMANTES ESTÃO FRONTEIRA DE D, SEGUE QUE OS VALORES MÁXI E MÍNIMO DE f EM D SÃO $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$ E $-\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$