UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Turma A - Matemática Diurno
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

SEGUNDA PROVA - 25/04/2014

Nome: ____________________

GRR: ____________________ **Assinatura:** ____________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Calcule os limites abaixo, se existirem. Caso não existam, justifique.

(a) **(1 ponto)** $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^5+11xy-y^4}{x^4+7x^2y^4+y^6}}_{= f(x,y)}$

$$\left(f(t,0) = t \xrightarrow{t\to 0} 0 \right)$$

$$f(0,t) = -\frac{1}{t^2} \xrightarrow{t\to 0} -\infty \qquad \therefore \text{ O LIMITE NÃO EXISTE.}$$

(b) **(1 ponto)** $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\ln(1+|xy|)}{\sqrt{x^4+y^6}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^4+y^6}}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{\ln(1+\underbrace{|xy|}_{\to 0})}_{\downarrow (x,y)\to(0,0) \atop \ln 1 = 0}$

$$= 0.$$

(c) **(1 ponto)** $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2(x^4+y^2)}-\cos(3\sqrt{x^4+y^2})+7xy^2}{x^4+y^2} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2(x^4+y^2)}-\cos\left(3\sqrt{x^4+y^2}\right)}{x^4+y^2} + \underbrace{7x}_{\to 0}\underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\text{LIMITADA}}$$

LIMITADA $\therefore$ O LIMITE DA 2.ª PARCE[LA] É ZERO

$$\boxed{u=\sqrt{x^4+y^2}}$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{e^{2u^2}-\cos(3u)}{u^2} \overset{LH}{=} \lim_{u\to 0^+} \frac{4ue^{2u^2}+3\,\text{sen}\,3u}{2u}$$

(CONTINUA)

$$\overset{LH}{=} \lim_{u \to 0^+} \frac{4\left(e^{2u^2} + 4u^2 e^{2u^2}\right) + 9\cos 3u}{2}$$

$$= \frac{13}{2}.$$

Questão 2 Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|\operatorname{sen}(x^2-2y^3)}{\sqrt{x^6+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) **(1 ponto)** Determine o valor de a que torna f contínua em $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{|x|\operatorname{sen}(x^2-2y^3)}_{\downarrow (x,y)\to(0,0) \atop 0} \cdot \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^6+y^2}}}_{\text{LIMITADA}} = 0 \quad \therefore \quad a=0$$

(b) **(2 pontos)** Mostre que f é diferenciável ~~em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.~~ na origem.

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ (USE A DEFINIÇÃO DE f_x, f_y)

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|hk|\operatorname{sen}(h^2-2k^3)}{\sqrt{h^6+k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^6+k^2}}}_{\text{LIMITADAS}} \cdot \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(h^2-2k^3)}_{\downarrow (h,k)\to(0,0) \atop 0} \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} 0$$

$\therefore$ f É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$.

Questão 3 Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(-3,2)$. Suponha que $f(-3,2)=1$ e que o plano

$$\pi : 3x - 5y + 2z = 2014$$

seja paralelo ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-3,2,1)$. Determine:

(a) **(1 ponto)** $\nabla f(-3,2)$;

PLANO TANGENTE EM $(-3,2,1)$:

$$3(x+3) - 5(y-2) + 2(z-1) = 0$$

$$z - 1 = -\frac{3}{2}(x+3) + \frac{5}{2}(y-2).$$

$$\therefore \begin{array}{l} f(-3,2) = 1 \\ f_x(-3,2) = -3/2 \\ f_y(-3,2) = 5/2 \end{array} \implies \nabla f(-3,2) = (-3/2, 5/2).$$

(b) **(1 ponto)** $\dfrac{\partial f}{\partial v}(-3,2)$, onde $v = (2,-1)$;

f DIFERENCIÁVEL EM $(-3,2) \implies$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-3,2) = \langle \nabla f(-3,2), (2,-1) \rangle$$

$$= \langle (-3/2, 5/2), (2,-1) \rangle$$

$$= -3 - \frac{5}{2} = -11/2.$$

(c) **(1,5 pontos)**

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{3t + f(x(t), y(t))\}^2,$$

onde $x(t) = 2e^{-t} - 5\cos t + 4t^2$ e $y(t) = t^5 + t^3 + 6\ln(1+t) + \tan t + 2$;

$x(0) = -3$, $y(0) = 2$, $x'(t) = -2e^{-t} + 5\cos t + 8t$

$y'(t) = 5t^4 + 3t^2 + \frac{6}{1+t} + \sec^2 t$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{3t + f(x(t), y(t))\}^2 = 2\{3\cdot 0 + f(-3,2)\}\cdot$$

$$\cdot\{3 + f_x(-3,2)\cdot x'(0) + f_y(-3,2)\cdot y'(0)\}$$

$$= 2\cdot\left\{3 + \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 3 + \left(\frac{5}{2}\right)\cdot 7\right\}$$ pois $x'(0) = 3$, $y'(0) = 7$

$= 32.$

(d) **(1,5 pontos)** $\frac{\partial g}{\partial u}(0,1)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(0,1)$, onde $g(u,v) = f(u^4 - 3v, e^{2u} + v^2)$.

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(-3,2)\cdot\left.(4u^3)\right|_{u=0} + \frac{\partial f}{\partial y}(-3,2)\cdot\left.(2e^{2u})\right|_{u=0}$$

$$= \frac{5}{2}\cdot 2 = 5$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(-3,2)\cdot(-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(-3,2)\cdot\left.(2v)\right|_{v=1}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-3) + \frac{5}{2}\cdot 2 = \frac{9}{2} + 5 = \frac{19}{2}.$$

Questão 4 **(2 pontos)** Mostre que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(0,0)$ que satisfaz a relação

$$f(tx, ty) = t f(x, y), \qquad (\Delta)$$

para todos $t > 0$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é uma função *linear*. (Dica: Mostre que f coincide com sua derivada em $(0,0)$.)

COMO f É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$, TEMOS, P/ CADA $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, QUE

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta,tb) - \overset{(*)}{f(0,0)}}{t}$$

(*) $f(0,0) = 0$; BASTA FAZER $t \to 0$ EM (Δ).

$$= f(a,b).$$

COMO $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v \rangle$, ENTÃO

$$= a \cdot f_x(0,0) + b f_y(0,0)$$

$$f(a,b) = a f_x(0,0) + b f_y(0,0),$$

PORTANTO, f É LINEAR.