UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
MA12 - Matemática Discreta - PROFMAT
Prof. Zeca Eidam

Lista 1

✰ Números Naturais e o Princípio de Indução

1. Prove que as identidades abaixo são verdadeiras para todo $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

   (c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   (d) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

   (e) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (f) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

   (g) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (h) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2} \right)^2$

   (i) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

   (j) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$

   (k) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$

   (l) $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

   (m) $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

   (n) $3 + 11 + \ldots + (8n-5) = 4n^2 - n$.

2. Prove que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ é verificada a fórmula do *binômio de Newton*:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j},$$

   onde $\dbinom{n}{j} \doteq \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ para cada $0 \le j \le n$.

3. Neste problema, vamos estudar uma maneira de deduzir expressões para somas do tipo

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k,$$

com $k \in \mathbb{N}$.

(a) Vamos deduzir uma expressão para $k = 5$. Use o binômio de Newton para mostrar que para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$(j+1)^6 - j^6 = 6j^5 + 15j^4 + 20j^3 + 15j^2 + 6j + 1.$$

(b) Some ambos os membros da igualdade acima de $j = 0$ até $j = n$ e use algumas das fórmulas do exercício (1) para obter uma fórmula para a soma $1^5 + 2^5 + \ldots + n^5$.

4. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $n! \geq 2^n$ para todo $n \geq 4$;

(b) $n! \geq 3^n$ para todo $n \geq 7$;

(c) $n! \geq 4^n$ para todo $n \geq 9$;

(d) $\sqrt{n} \leq n - 1$ para todo $n \geq 3$;

(e) $2^{n-2} \geq 2n - 3$ para todo $n \geq 5$;

(f) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(g) **(Desigualdade de Bernoulli)** Se $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$ então $(1+x)^n > 1 + nx$.

(h) Se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$.

(i) Se $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$ e $n \in \mathbb{N}$ então $(1-x)^n \geq 1 - nx$.

(j) Mostre que se $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq -2014$ então $(2014 + x)^n \geq n(2014)^{n-1}x$.

5. Encontre uma expressão condensada para as seguintes somas:

(a) $1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+3+\ldots+n)$

(b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$

(c) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + (2n-1)(2n+1)$

(d) $n + (n-1)2^2 + (n-2)3^2 + \ldots + n^2$

(e) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2$

(f) $1^4 + 2^4 + \ldots + (2n-1)^4$

6. Mostre que

$$2\sqrt{j+1} - 2\sqrt{j} < \frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{j} - 2\sqrt{j-1}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Somando ambos os membros da desigualdade acima, conclua que

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

7. O conjunto $\mathscr{P}(X)$ das *partes* de um conjunto X dado é definido por

$$\mathscr{P}(X) \doteq \{A : A \subset X\}.$$

Se X é finito e tem n elementos, mostre que $\mathscr{P}(X)$ tem 2^n elementos.

8. Sejam X, Y conjuntos não-vazios finitos com m e n elementos, respectivamente. Mostre, por indução sobre n que o conjunto das funções $f : X \to Y$ tem n^m elementos. Obtenha o resultado do exercício anterior a partir deste.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) Prove que $f(0) = 0$.
   (b) Prove que $f(n) = an$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $a = f(1)$.
   (c) Prove que $f(n) = an$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
   (d) Prove que $f(r) = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.
   (e) Será que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) Prove que $f(0) = 1$.
   (b) Prove que $f(n) = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $a = f(1)$.
   (c) Prove que $f(n) = a^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
   (d) Prove que $f(r) = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.
   (e) Será que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

11. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m *divide* n se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = km$. Este fato é denotado por $m|n$. Prove a veracidade das seguintes afirmações, para todo $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $6|n^3 + 11n$
   (b) $9|4^n + 15n - 1$
   (c) $3^{n+2}|10^{3n} - 1$
   (d) $7|2^{3n} - 1$
   (e) $8|3^{2n} + 7$
   (f) $7|3^{2n+1} + 2^{n+2}$
   (g) $171|773^n - 602^n$
   (h) $424|193^{2n+1} + 231^{2n+1}$
   (i) $169|3^{3n+3} - 26n - 27$

12. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a > b$. Prove as seguintes afirmações, para todo $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $a - b|a^n - b^n$
   (b) $a + b|a^{2n+1} + b^{2n+1}$

(c) $a+b|a^{2n}-b^{2n}$

(d) Reobtenha alguns ítens do exercício anterior a partir dos ítens acima.

(e) $2|a^2-a$

(f) $3|a^3-a$

(g) $5|a^5-a$

(h) $7|a^7-a$

(i) $11|a^{11}-a$

13. Mostre que $1977|931^{547}+1046^{547}$.

14. (AV1-2012) Mostre que 7^n-1 é divisível por 6 para todo $n\in\mathbb{N}$.

15. Uma *progressão aritmética* (PA) com primeiro termo a_1 e razão r é uma sequência de números reais $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfazendo
$$a_n = a_{n-1} + r\,,$$
para cada $n \geq 2$.

    (a) Prove que $a_n = a_1 + nr$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

    (b) Prove que $\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

16. Uma *progressão geométrica* (PG) com primeiro termo a_1 e razão q ($q\notin\{0,1\}$) é uma sequência de números reais $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfazendo
$$a_n = a_{n-1}\cdot q\,,$$
para cada $n \geq 2$.

    (a) Prove que $a_n = a_1\cdot q^n$para todo $n\in\mathbb{N}$.

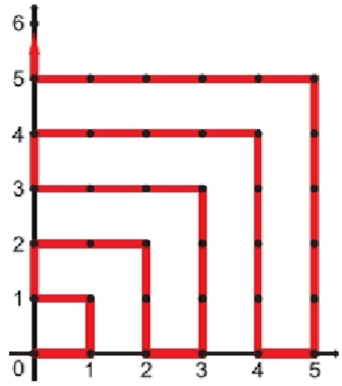
    (b) Prove que $\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

17. (AV1-2013)

    (a) Se $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica de termos positivos, prove que $\{b_n\}$ definida por $b_n = \log a_n$ é uma progressão aritmética.

    (b) Se $\{a_n\}$ é uma progressão aritmética, prove que $\{b_n\}$ definida por $b_n = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica.

18. (AV1-2012) A figura abaixo mostra uma linha poligonal que parte da origem e passa uma vez por cada ponto do plano cujas coordenadas são números inteiros não-negativos.



(a) O conjunto dos pares de números inteiros não-negativos tem a mesma cardinalidade que os números naturais? Por quê?

(b) Mostre que o comprimento da linha poligonal da origem até o ponto (n,n) é n^2+n, para qualquer inteiro não-negativo n.

(c) Qual é o comprimento da linha poligonal da origem até o ponto $(10,13)$?

19. Uma progressão *aritmético-geométrica* é uma sequência $\{a_n\}$ de números reais tal que $a_1 \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ e $r \in \mathbb{R}$ são dados e tem-se

$$a_n = q a_{n-1} + r\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Prove que $a_n = a_1 q^{n-1} + r\dfrac{q^n-1}{q-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prove que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1\frac{q^n-1}{q-1} + r\frac{q^n-1}{(q-1)^2} + r\frac{n}{1-q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

20. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não-vazio satisfazendo as propriedades abaixo:

① Existe uma família crescente de números naturais $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ tais que os números

$$m_j \doteq 2014^{k_j} - 37k_j$$

pertencem a X, para todo $j \in \mathbb{N}$.

② Se $n \in X$ então $n-1 \in X$.

Prove que $X = \mathbb{N}$.

21. Considere a sequência $\{s_n\}$ dada por

$$s_n \doteq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que $s_{2^n} > 1 + \dfrac{n}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que $s_{2^n-1} < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) (AV1-2013) Mostre que $s_{2^n-1} > \dfrac{n}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) O que acontece com os valores s_n quando n cresce?

22. Considere a sequência $\{s_n\}$ dada por

$$s_n \doteq \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que $s_{2n} < s_{2n+2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que $s_{2n-1} > s_{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Mostre que $s_{2n} < s_{2m+1}$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

(d) O que acontece com os valores s_n quando n cresce?

23. Considere a sequência $\{x_n\}$ definida como $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2},$$

para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $1 \leq x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

24. Considere a sequência $\{x_n\}$ definida por $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$,

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) O que acontece com os valores s_n quando n cresce?

25. Considere a sequência $\{x_n\}$ definida por $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$,

$$x_n = \sqrt{2}^{x_{n-1}},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) O que acontece com os valores s_n quando n cresce?

26. **(Sobre a construção abstrata do conjunto dos números naturais)** Vimos em aula que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é um conjunto munido de uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ chamada função *sucessor* tal que

① s é injetora;

② Existe um elemento, denotado por 1 tal que $s(n) \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

③ Se uma sentença $P(n)$ é verdadeira para $n=1$ e sempre que $P(n)$ é verdadeira, tem-se que $P(n+1)$ é verdadeira, então que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assumimos a existência de um conjunto com estas propriedades e a partir daí, definimos as operações de soma e produto e a ordem usual. Definimos também a noção essencial de *número de elementos de um conjunto finito.*

Prove as seguintes afirmações:

(a) Não existe nenhum número natural n tal que $0 < n < 1$.

(b) Mostre que se $\{k_n\}$ é uma sequência de números naturais tais que $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \dots$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n = k_m$ para todo $m \geq n$.

(c) Prove que todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$ tem primeiro elemento. (Princípio da Boa Ordenação)

(d) Um *conjunto totalmente ordenado* é um par $(X, \preceq)$, onde X é um conjunto não-vazio e $\preceq$ é uma relação binária entre elementos de X tal que

① $x \preceq x$ para todo $x \in X$; (Reflexividade)

② Se $x \preceq y$ e $y \preceq z$ então $x \preceq z$. (Transitividade)

③ Dados $x, y \in X$, ou $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. (Tricotomia)

④ Se $x \preceq y$ e $y \preceq x$ então $x = y$.

Se $A \subset X$ é não-vazio, um elemento $a \in A$ é dito ser o *menor elemento de* A ou *primeiro elemento de* A se $a \preceq x$ para todo $x \in X$. X é dito *bem-ordenado* se todo subconjunto não-vazio de X tem primeiro elemento. Evidentemente, $\mathbb{N}$ munido da ordem usual é um conjunto bem-ordenado.

Mostre que se X é um conjunto bem-ordenado tal que, para cada $x \in X$, o *segmento inicial* I_x, definido por

$$I_x \doteq \{y \in X : y \preceq x\}$$

é finito, então existe uma função $f : X \to \mathbb{N}$ bijetora tal que $x \preceq y$ se e só se $f(x) \preceq f(y)$, para todos $x, y \in X$. Dito de outra forma, $\mathbb{N}$ é o *único* conjunto bem-ordenado no qual todo segmento inicial é finito.

27. Demonstre, para todos $m, n, k \in \mathbb{N}$, as identidades abaixo, envolvendo números binomiais:

(a) $\binom{j}{j} + \binom{j+1}{j} + \dots + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j+1}$

(b) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m}$

(c) $\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$

(d) $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$

28. Seja $\{u_n\}$ a sequência de Fibonacci. Mostre que para todo $n \geq 1$ as afirmações abaixo são verdadeiras:

(a) $u_1^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$;

(b) u_{3n} é par;

(c) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{2n+1} - 1$;

(d) $u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$;

(e) $u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;

(f) $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 ... + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1$;

(g) $1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n = n u_{n+2} - u_{n+3} + 2$;

(h) $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$.