

Lista 1

☆ Integrais múltiplas

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)  $\int \int_R (2y^2 - 3xy^3) dx dy$ , onde  $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$ .

(b)  $\int \int_R x \operatorname{sen} y dx dy$ , onde  $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6}\}$ .

(c)  $\int \int_R \frac{1}{x+y} dx dy$ , onde  $R = [1, 2] \times [0, 1]$ .

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície  $z = x\sqrt{x^2 + y}$  e os planos  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$  e  $z = 0$ .

3. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro  $z = 9 - y^2$  e pelo plano  $x = 2$ .

4. Calcule as integrais iteradas  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx$  e  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$ . As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)  $\int \int_D xy dx dy$ , onde  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ .

(b)  $\int \int_D (x^2 - 2xy) dx dy$ , onde  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x\}$ .

(c)  $\int \int_D e^{x/y} dx dy$ , onde  $D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$ .

(d)  $\int \int_D x \cos y dx dy$ , onde  $D$  é a região limitada por  $y = 0$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 1$ .

(e)  $\int \int_D 4y^3 dx dy$ , onde  $D$  é a região limitada por  $y = x - 6$  e  $y^2 = x$ .

(f)  $\int \int_D xy dx dy$ , onde  $D$  é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1.

(g)  $\int \int_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4) dx dy$ , onde  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

6. Determine o volume do sólido  $S$  em cada um dos seguintes casos:

(a)  $S$  é limitado superiormente pelo parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e sua projeção no plano  $xy$  é a região limitada por  $y = x^2$  e  $x = y^2$ .

(b)  $S$  é limitado superiormente por  $z = xy$  e sua projeção no plano  $xy$  é o triângulo de vértices  $(1, 1)$ ,  $(4, 1)$  e  $(1, 2)$ .

(c)  $S$  é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro  $x^2 + z^2 = 9$  e pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  e  $x + 2y = 2$ .

(d)  $S$  é limitado pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  e  $x + y + z = 1$ .

(e)  $S$  é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e pelos planos  $y = z$ ,  $x = 0$  e  $z = 0$ .

(f)  $S$  é limitado pelos cilindros  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $y^2 + z^2 = r^2$ .

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

onde  $D$  é a região do plano limitada pelas curvas  $y = -x^2 + x + 2$  e  $x - 2y + 1 = 0$ .

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a)  $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$       (b)  $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$

(c)  $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy.$

9. Calcule as integrais:

(a)  $\iint_R x dx dy$ , onde  $R$  é o disco de centro na origem e raio 5.

(b)  $\iint_R xy dx dy$ , onde  $R$  é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 = 25$ .

(c)  $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , onde  $R$  é a região interior à cardioide  $r = 1 + \sin \theta$  e exterior à circunferência  $r = 1$ .

(d)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , onde  $D$  é a região limitada pelas espirais  $r = \theta$  e  $r = 2\theta$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

10. Determine o volume da região interior à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  e exterior ao cilindro  $x^2 + y^2 = 2ax$ , com  $a > 0$ .

11. Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região  $D$  e tem densidade  $\rho$ , nos seguintes casos:

(a)  $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  e  $\rho(x, y) = x^2$ .

(b)  $D$  é o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(0, 3)$  e  $\rho(x, y) = x + y$ .

(c)  $D$  é a região do primeiro quadrante limitada pela parábola  $y = x^2$  e a reta  $y = 1$  e  $\rho(x, y) = xy$ .

(d)  $D$  é a região limitada pela parábola  $y^2 = x$  e a reta  $y = x - 2$  e  $\rho(x, y) = 3$ .

(e)  $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$  e  $\rho(x, y) = y$ .

12. Calcule as integrais triplas:

(a)  $\int \int \int_D yz \, dx \, dy \, dz$ , onde  $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2z, 0 \leq x \leq z + 2\}$ .

(b)  $\int \int \int_D y \, dx \, dy \, dz$ , onde  $D$  é a região abaixo do plano  $z = x + 2y$  e acima da região no plano  $xy$  limitada pelas curvas  $y = x^2$ ,  $y = 0$  e  $x = 1$ .

(c)  $\int \int \int_D xy \, dx \, dy \, dz$ , onde  $D$  é o tetraedro sólido com vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  e  $(0, 0, 3)$ .

(d)  $\int \int \int_D z \, dx \, dy \, dz$ , onde  $D$  é limitada pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y + z = 1$  e  $x + z = 1$ .

(e)  $\int \int \int_D x \, dx \, dy \, dz$ , onde  $D$  é limitada pelo parabolóide  $x = 4y^2 + 4z^2$  e pelo plano  $x = 4$ .

13. Determine a massa e o centro de massa do cubo  $Q = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$  cuja densidade é dada pela função  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

14. Calcule as seguintes integrais:

(a)  $\int \int \int_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$ , onde  $E$  é a região limitada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  e pelos planos  $z = -1$  e  $z = 2$ .

(b)  $\int \int \int_E y \, dx \, dy \, dz$ , onde  $E$  é a região entre os cilindros  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 = 1$ , limitada pelo plano  $xy$  e pelo plano  $z = x + 2$ .

(c)  $\int \int \int_E x^2 \, dx \, dy \, dz$ , onde  $E$  é o sólido limitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , acima do plano  $z = 0$  e abaixo do cone  $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ .

15. Determine o volume da região  $R$  limitada pelos parabolóides  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$ .

16. Determine a massa e o centro de massa do sólido  $S$  limitado pelo parabolóide  $z = 4x^2 + 4y^2$  e pelo plano  $z = a$  ( $a > 0$ ), se  $S$  tem densidade constante  $K$ .

17. Calcule as integrais:

(a)  $\int \int \int_B (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ , onde  $B$  é a bola unitária  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

(b)  $\int \int \int_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ , onde  $E$  é a região interior ao cone  $\varphi = \pi/6$  e à esfera  $\rho = 2$ .

(c)  $\int \int \int_E x \, dx \, dy \, dz$ , onde  $E$  é o conjunto  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ .

18. Determine a massa de um hemisfério sólido  $H$  de raio  $a$  se a densidade em qualquer ponto é proporcional a sua distância ao centro da base.

19. a) Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

b) Calcule a massa do sólido  $\xi = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq a > 0\}$ ,  $\delta(x, y, z) = z$ .

20. Seja  $f$  contínua em  $[0, 1]$  e seja  $R$  a região triangular com vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ . Mostre que

$$\iint_R f(x+y) dx dy = \int_0^1 u f(u) du.$$

21. Calcule  $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}} dx dy$ , onde  $D$  é a região entre os círculos com centros na origem e raios  $r$  e  $R$ ,  $0 < r < R$ . Para que valores de  $n$  a integral tem limite quando  $r \rightarrow 0+$ ? E quando  $R \rightarrow \infty$ ?

22. Faça uma análise semelhante para a integral tripla

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}} dx dy dz,$$

onde  $D$  é a região interior às esferas com centros na origem e raios  $r$  e  $R$ ,  $0 < r < R$ .

23. Use a transformação  $x = u^2$ ,  $y = v^2$ ,  $z = w^2$  para calcular o volume da região limitada pela superfície  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$  e pelos planos coordenados.

### ☆ Integrais de linha

24. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(a)  $\int_{\gamma} x ds$ ,  $\gamma(t) = (t^3, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

(b)  $\int_{\gamma} xy^4 ds$ ,  $\gamma$  é a semi-circunferência  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $x \geq 0$ .

(c)  $\int_{\gamma} (x - 2y^2) dy$ ,  $\gamma$  é o arco da parábola  $y = x^2$  de  $(-2, 4)$  a  $(1, 1)$ .

(d)  $\int_{\gamma} xy dx + (x - y) dy$ ,  $\gamma$  consiste dos segmentos de reta de  $(0, 0)$  a  $(2, 0)$  e de  $(2, 0)$  a  $(3, 2)$ .

(e)  $\int_{\gamma} xyz ds$ ,  $\gamma: x = 2t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $z = 3 \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

(f)  $\int_{\gamma} xy^2 z ds$ ,  $\gamma$  é o segmento de reta de  $(1, 0, 1)$  a  $(0, 3, 6)$ .

(g)  $\int_{\gamma} x^3 y^2 z dz$ ,  $\gamma$  é dada por  $x = 2t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

(h)  $\int_{\gamma} z^2 dx - z dy + 2y dz$ ,  $\gamma$  consiste dos segmentos de reta de  $(0, 0, 0)$  a  $(0, 1, 1)$ , de  $(0, 1, 1)$  a  $(1, 2, 3)$  e de  $(1, 2, 3)$  a  $(1, 2, 4)$ .

25. Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$  e  $\gamma$  é a curva ligando o ponto  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$  nos seguintes casos:

(a)  $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ ;

(b)  $\gamma$  é composta dos segmentos de reta de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 0, 0)$ , depois a  $(1, 1, 0)$  e depois a  $(1, 1, 1)$ ;

26. Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  para:

- (a) (a)  $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ , onde  $\gamma$  é o arco de circunferência  $\gamma(x) = (x, \sqrt{4 - x^2})$ , ligando  $(-2, 0)$  a  $(2, 0)$ ;  
 (b) (b)  $\vec{F}(x, y) = 2(x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ , onde  $\gamma$  é a elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , percorrida uma vez em sentido anti-horário.

27. Calcule:

- (a)  $\int_{\gamma} x dx + (y + x) dy + z dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 2x + 2y - 1$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido horário;  
 (b)  $\int_{\gamma} (2y + 1) dx + z dy + x dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $x^2 + 4y^2 = 1$  e  $x^2 + z^2 = 1$ , com  $y \geq 0, z \geq 0$ , percorrida uma vez do ponto  $(1, 0, 0)$  ao ponto  $(-1, 0, 0)$ ;  
 (c)  $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $x + y = 2$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxz$  seja percorrida uma vez no sentido horário;  
 (d)  $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $z = xy$  e  $x^2 + y^2 = 1$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido horário;  
 (e)  $\int_{\gamma} x^2 dx + x dy + z dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $z = \frac{x^2}{9}$  e  $z = 1 - \frac{y^2}{4}$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido anti-horário;  
 (f)  $\int_{\gamma} y^2 dx + 3z dy$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 2x + 4y$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido anti-horário;  
 (g)  $\int_{\gamma} z dy - x dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção do elipsóide  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = \frac{4}{3}$  com o plano  $x + z = 2$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido anti-horário.

28. Calcule:

- (a)  $\int_{\gamma} 2x dx + (z^2 - y^2) dz$ , onde  $\gamma$  é o arco circular dado por  $x = 0, y^2 + z^2 = 4$ , de  $(0, 2, 0)$  a  $(0, 0, 2)$ ,  $y \geq 0$ ;  
 (b)  $\int_{\gamma} \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = a^2$ , percorrida uma vez no sentido horário;  
 (c)  $\int_{\gamma} \sqrt{y} dx + \sqrt{x} dy$ , sendo  $\gamma$  a fronteira da região limitada por  $x = 0, y = 1$  e  $y = x^2$ , percorrida uma vez no sentido horário;

29. Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x \geq 0$ . Se a densidade linear é  $x^2$ , determine a massa e o centro de massa do cabo.
30. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + (y + 2)\vec{j}$  ao mover um ponto ao longo da cicloide  $\vec{r}(t) = (t - \text{sen}t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
31. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:
- $\oint_{\gamma} x^2 y dx + xy^3 dy$ , onde  $\gamma$  é o quadrado com vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(0, 1)$ , orientado positivamente;
  - $\oint_{\gamma} (x + 2y) dx + (x - 2y) dy$ , onde  $\gamma$  consiste do arco da parábola  $y = x^2$  de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$  e do segmento de reta de  $(1, 1)$  a  $(0, 0)$ .
  - $\oint_{\gamma} (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$ , onde  $\gamma$  é a fronteira da região limitada pelas parábolas  $y = x^2$  e  $x = y^2$  percorrida no sentido anti-horário.
  - $\oint_{\gamma} x^2 dx + y^2 dy$ ,  $\gamma$  é a curva  $x^6 + y^6 = 1$ , sentido anti-horário.
  - $\oint_{\gamma} xy dx + (2x^2 + x) dy$ ,  $\gamma$  consiste do segmento de reta unindo  $(-2, 0)$  a  $(2, 0)$  e da semi-circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ , orientada positivamente.
  - $\oint_{\gamma} 2xy dx + (x^2 + x) dy$ ,  $\gamma$  é a cardióide  $\rho = 1 + \cos \theta$  orientada positivamente.
  - $\oint_{\gamma} (xy + e^{-x^2}) dx + (x^2 - \ln(1 + y)) dy$ ,  $\gamma$  consiste do segmento de reta de  $(0, 0)$  a  $(\pi, 0)$  e do arco da curva  $y = \text{sen}x$ , orientada positivamente.
  - $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2 y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$  e  $\gamma$  consiste do arco de circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  de  $(2, 0)$  a  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , e dos segmentos de reta de  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  a  $(0, 0)$  e de  $(0, 0)$  a  $(2, 0)$ .
32. Seja  $D$  uma região de  $\mathbb{R}^2$  com  $D$  e  $\partial D$  satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de  $D$  coincide com a integral  $\int_{\partial D} x dy = \int_{\partial D} -y dx$ .
33. Usando o exercício anterior, calcule a área de:
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ ;
  - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$ .
34. Determine a área da região limitada pela hipocicloide dada por  $\vec{r}(t) = \cos^3 t \vec{i} + \text{sen}^3 t \vec{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
35. Neste exercício, vamos calcular a área de um polígono irregular.
- Se  $\gamma$  é o segmento de reta ligando o ponto  $(x_1, y_1)$  ao ponto  $(x_2, y_2)$ , mostre que

$$\int_{\gamma} x dy - y dx = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

- (b) Em ordem anti-horária, os vértices de um polígono são  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ . Mostre que sua área é dada por

$$A = \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{N-1} y_N - x_N y_{N-1}) + (x_N y_1 - x_1 y_N)].$$

- (c) Determine a área do pentágono de vértices  $(0, 0), (2, 1), (1, 3), (0, 2)$  e  $(-1, 2)$ .

36. Calcule

- (a)  $\int_{\gamma} x^2(5y dx + 7x dy) + e^y dy$ , sendo  $\gamma$  a elipse  $16x^2 + 25y^2 = 100$ , percorrida de  $(0, -2)$  até  $(0, 2)$ ,  $x > 0$ .
- (b)  $\int_{\gamma} (2xe^y - x^2 y - \frac{y^3}{3}) dx + (x^2 e^y + \operatorname{sen} y) dy$ , sendo  $\gamma$  a circunferência  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , percorrida de  $(0, 0)$  até  $(2, 0)$  com  $y > 0$ .
- (c)  $\int_{\gamma} \vec{v} dr$ , sendo  $\gamma$  a fronteira do retângulo  $[1, 2] \times [-1, 1]$  e  $\vec{v}(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{x} \vec{i} + [\ln(x^2 + y^2) + 2x] \vec{j}$ , percorrida no sentido anti-horário.

37. Calcule

- (a)  $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$  sendo  $\gamma$  a curva fronteira da região determinada pelas curvas  $y^2 = 2(x + 2)$  e  $x = 2$ , orientada no sentido horário.
- (b)  $\int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$  sendo  $\gamma$  a curva  $y = x^2 + 1$   $-1 \leq x \leq 2$ , percorrida do ponto  $(-1, 2)$  a  $(2, 5)$ .
- (c)  $\int_{\gamma} \frac{y dx - (x - 1) dy}{(x - 1)^2 + y^2}$  sendo  $\gamma$  a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ , percorrida no sentido horário.
- (d)  $\int_{\gamma} \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2}$  sendo  $\gamma = \partial R$  onde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ , orientada no sentido horário.

38. Verifique que a integral  $\int_{\gamma} 2x \operatorname{sen} y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy$ , onde  $\gamma$  é uma curva ligando  $(-1, 0)$  a  $(5, 1)$ , é independente do caminho e calcule o seu valor.

39. Seja  $\gamma$  uma curva plana simples, fechada e lisa por partes percorrida uma vez no sentido horário. Encontre todos os valores possíveis para

(a)  $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$

(b)  $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + 9y^2}$

40. Sejam as curvas  $\gamma_1$  a circunferência  $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$  percorrida no sentido anti-horário,  $\gamma_2$  a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ , percorrida no sentido anti-horário e  $\gamma_3$  a curva formada pela união das

três seguintes circunferências:  $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ ,  $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ , ambas percorridas no sentido horário e  $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$  percorrida no sentido anti-horário. Se  $I_k = \int_{\gamma_k} P dx + Q dy$  onde

$$P(x, y) = -y \left( \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right)$$

e

$$Q(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$$

então calcule  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .

41. Calcule  $\int_{\gamma} F d\vec{r}$  onde  $F = \left( \frac{-y}{x^2 + \frac{y^2}{9}} + y, \frac{x}{x^2 + \frac{y^2}{9}} + 3x \right)$  se

(a)  $\gamma$  é a curva  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ , percorrida uma vez no sentido horário.

(b)  $\gamma$  é a curva  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ , percorrida uma vez no sentido horário.

42. Um campo de vetores  $\vec{F}$  em  $\mathbb{R}^2$  se diz *radial* (ou *central*) se existe uma função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\vec{F}(x, y) = g(|\vec{r}|)\vec{r}$ , onde  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Suponha que  $g$  é de classe  $C^1$ . Mostre que  $\vec{F}$  é conservativo.

43. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

sobre um caminho que não passe pela origem.

44. Em cada caso abaixo, determine se  $\vec{F}$  é ou não campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine o potencial de  $\vec{F}$ .

(a)  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + x\vec{j}$  em  $\mathbb{R}^2$

(b)  $\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$  em  $\mathbb{R}^2$

(c)  $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2)\vec{i} + (3x^3y - 3xy)\vec{j} + -(4z^2y^2 + 2x^3z)\vec{k}$  em  $\mathbb{R}^3$

(d)  $\vec{F}(x, y, z) = (x+z)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$  em  $\mathbb{R}^3$

(e)  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3)\vec{i} - (4 + 2y \operatorname{sen} x)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$  em  $\mathbb{R}^3$

(f)  $\vec{F}(x, y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ , em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

(g)  $\vec{F}(x, y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ , em  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ se } y = 0\}$

(h)  $\vec{F}(x, y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}$ , em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

45. Seja o campo  $\vec{F}(x, y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}$  e  $\gamma$  a curva dada por  $\gamma(t) = (e^t, \operatorname{sen} t)$  para  $0 \leq t \leq \pi$ . Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ .

46. Calcule as integrais:



- (a) (a)  $\int_{\gamma} 7x^6 y dx + x^7 dy$  sendo  $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$ , onde  $t \in [0, 1]$ .
- (b) (b)  $\int_{\gamma} [\ln(x+y^2) - y] dx + [2y \ln(x+y^2) - x] dy$  sendo  $\gamma$  a curva  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  com  $y \geq 0$  orientada no sentido horário.
- (c) (c)  $\int_{\gamma} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$  sendo  $\gamma$  a curva dada por  $x(t) = \cos^3 t$  e  $y(t) = \sin^3 t$  com  $y \geq 0$  ligando os pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , nessa ordem.

47. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

- (a) (a)  $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy$ .
- (b) (b)  $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y dx + x \cos y dy$ .

48. Calcule

- (a) (a)  $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz dx + xz dy + xy dz$ .
- (b) (b)  $\int_{\gamma} \sin(yz) dx + xz \cos(yz) dy + xy \cos(yz) dz$ , sendo  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  para  $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

49. Calcule  $\int_A^B \frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ , onde o ponto  $A$  pertence à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e o ponto  $B$  pertence a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

50. Se  $\vec{n}(x, y)$  é vetor unitário normal ao traço da curva  $\gamma$  em  $(x, y)$ , calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$  sendo

- (a) (a)  $\vec{F}(x, y) = x^{10} \vec{i} + (3x - 10x^9 y) \vec{j}$  e  $\gamma$  a parte da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  contida no primeiro quadrante,  $n$  normal exterior à circunferência
- (b) (b)  $\vec{F}(x, y) = x^3 y^3 \vec{i} - \frac{3x^2 y^4 + 2}{4} \vec{j}$  e  $\gamma(t) = (t^3, \sin(4 \arctan t^2))$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $n \cdot \vec{j} \leq 0$ .

### ☆ Respostas

- (1) (a)  $-\frac{585}{8}$ , (b)  $\frac{15}{4}(2 - \sqrt{3})$ , (c)  $\ln \frac{27}{16}$ ; (2)  $\frac{4}{15}(2\sqrt{2} - 1)$ ; (3) 36; (4)  $-1/2$  e  $1/2$ ; (5) (a)  $\frac{1}{12}$ , (b)  $-\frac{19}{42}$ , (c)  $\frac{1}{2}e^4 - 2e$ , (d)  $(1 - \cos 1)/2$ , (e)  $\frac{500}{3}$ , (f)  $\frac{1}{8}$ , (g)  $8\pi$ ; (6) (a)  $\frac{6}{35}$ , (b)  $\frac{31}{8}$ , (c)  $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2} \arcsen \frac{2}{3}$ , (d)  $\frac{1}{6}$ , (e)  $\frac{1}{3}$ , (f)  $\frac{16}{3}r^3$ ; (8) (a)  $(e^9 - 1)/6$ , (b)  $\frac{1}{4} \sin 81$ , (c)  $(2\sqrt{2} - 1)/3$ ; (9) (a) 0, (b)  $\frac{609}{8}$ , (c) 2, (d)  $24\pi^5$ ; (11) (a)  $\frac{2}{3}$ ,  $(0, \frac{1}{2})$ , (b) 6,  $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$ , (c)  $\frac{1}{6}$ ,  $(\frac{4}{7}, \frac{3}{4})$ , (d)  $\frac{27}{2}$ ,  $(\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$  (e)  $\frac{\pi}{4}$ ,  $(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi})$ ; (12) (a)  $\frac{7}{5}$ , (b)  $\frac{5}{28}$ , (c)  $\frac{1}{10}$ , (d)  $\frac{1}{12}$ , (e)  $\frac{16\pi}{3}$ ; (13)  $a^5$ ,  $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$ ; (14) (a)  $24\pi$ , (b) 0, (c)  $2\pi/5$ ; (15)  $162\pi$ ; (16)  $\pi K a^2/8$ ,  $(0, 0, 2a/3)$ ; (17) (a)  $4\pi/5$ , (b)  $4\pi(2 - \sqrt{3})$ , (c)  $\frac{3\pi}{2}$ ; (18)  $K\pi a^4/2$ , onde  $K$  é a constante de proporcionalidade; (19) (a)  $\frac{4}{3}\pi abc$ ; (b)  $\frac{\pi}{4}(r^2 - a^2)^2$ ;
- (24) (a)  $(10\sqrt{10} - 1)/54$ , (b) 1638, 4, (c) 48, (d)  $\frac{17}{3}$ , (e)  $9\sqrt{13}\pi/4$ , (f)  $3\sqrt{35}$ , (g)  $\frac{16}{11}$ , (h)  $\frac{77}{6}$ ; (25) (a)  $-\frac{11}{15}$ , (b) 1; (26) (a)  $2\pi$ , (b)  $\pi ab$ ; (27) (a)  $-\pi$ , (b)  $-2$ , (c)  $-2\pi\sqrt{2}$ , (d)  $\pi$ , (e)  $6\pi$ , (f)  $10\pi$ , (g)  $R = -2\pi\sqrt{3}$ ; (28) (a)  $-\frac{8}{3}$ ; (b)  $2\pi$ ; (c)  $-3/10$ ; (29)  $4\pi$ ,  $(\frac{16}{3\pi}, 0)$ ; (30)  $2\pi^2$ ; (31) (a)  $-1/12$ , (b)  $-1/6$ , (c)  $1/3$ , (d) 0, (e)  $2\pi$ , (f)  $\frac{3\pi}{2}$ , (g)  $\pi$ , (h)  $\pi + \frac{16}{3}[\frac{1}{\sqrt{2}} - 1]$ ; (34)  $3\pi/8$ ; (35) (c)  $\frac{9}{2}$ ; (36) (a)  $e^{-2} - e^2 + \frac{125}{2}\pi$ ; (b)  $4 - \frac{3\pi}{4}$ ;

(c) 4; **(37)** (a)  $-2\pi$ ; (b)  $\frac{1}{2} \ln \frac{29}{5}$ ; (c)  $2\pi$ ; (d)  $\pi$ ; **(38)**  $25 \sin 1 - 1$ ; **(39)** (a) 0 ou  $-2\pi$ ; b) 0 ou  $-\frac{\pi}{3}$ ; **(40)**  $I_1 = 2\pi$ ;  $I_2 = 6\pi$ ;  $I_3 = -2\pi$ ; **(41)** (a)  $-8\pi$ ; (b)  $-14\pi$ ; **(43)**  $2k\pi$ , com  $k$  inteiro; **(44)** (a) não; (b)  $\varphi = x^2 e^y + xy - y^2 + c$ ; (c) não; (d)  $\varphi = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + zx - zy + c$ ; (e)  $\varphi = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + c$ ; (f) não; (g)  $\varphi = \arctan(y/x)$ ; (h)  $\varphi = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + c$ ; **(45)**  $\pi$ ; **(46)** (a) 1, (b)  $3 \ln 3 - 2$ , (c)  $\frac{-\pi}{2}$ ; **(47)** (a)  $a^2 b - \frac{b^3}{3} - \frac{2}{3}$ ; (b)  $a \sin b$ ; **(48)** (a)  $-2$ , (b)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$ ; **(49)**  $\ln 2$ ; **(50)** (a)  $-\frac{1}{11}$ ; (b)  $\frac{1}{2}$ .